А. В. ПОГОРЕЛОВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

513
П 43
УДК 513

Книга содержит строгое изложение школьного курса геометрии. Отличительной особенностью изложения является простая, компактная и естественная аксиоматика (12 аксиом). Эта аксиоматика не обременяет изложения, как это бывает в серьезных курсах по основаниям геометрии. Она не нарушает традиционного порядка в изложении школьного курса геометрии и сохраняет традиционные доказательства теорем. Однако она делает эти доказательства совершенно безупречными. Книга будет полезна для студентов вузов педагогических специальностей и для учителей средних школ.

2-2-2
51-69

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

Преподавание геометрии в школе имеет целью не только сообщать учащимся геометрические результаты, но также научить их методу, при помощи которого эти результаты получаются. Как известно, геометрические результаты (теоремы) получаются путем логических рассуждений (доказательств) из некоторых отправных положений (аксиом). Логические рассуждения являются необходимой частью всякого познания. Геометрия отличается ясностью и простотой как в формулировке результата, так и в тех исходных положениях, из которых этот результат должен быть получен. Поэтому геометрия дает нам лучшие возможности для развития логического мышления в школе. Посмотрим, однако, как реализуются эти возможности.

Знакомство учащихся с геометрией начинается в младших классах. Здесь вводятся основные геометрические понятия, формулируются основные свойства простейших фигур, решаются простейшие задачи. Где-то в шестом классе мы впервые произносим три слова — аксиома, теорема, доказательство, — и тогда начинается настоящая геометрия.

Аксиомы весьма многочисленны, и мы ограничиваемся формулировкой одной из них, аксиомы о возможности провести через две данные точки прямую. В действительности не многочисленность аксиом удерживает нас от их формулировки. Для этого есть другая, более серьезная причина. Дело в том, что вслед за аксиомами идут многочисленные теоремы очевидного содержания, доказательство которых часто далеко не просто. Поэтому мы сознательно не формулируем другие аксиомы и приступаем сразу к доказательству весьма содержательных теорем.

Мы формулируем теорему и приводим некоторое рассуждение, которое называем доказательством. Мы пишем, что даны, скажем, какие-то треугольники и надо доказать их равенство или что-либо другое. Действительно ли даны только треугольники? Конечно, нет. Есть нечто, данное нам еще, — это аксиомы, которые составляют основу нашего доказательства. Если переставлять всеми способами слова, содержащиеся в условии теоремы, мы еще не получим доказательства. Но наше рассуждение настолько просто и аргументы настолько привычны учащемуся, что он с ними охотно соглашается.

В другой раз мы предлагаем учащемуся доказать ту же теорему. Представим себе, что учащийся проявляет некоторую самостоятельность в рассуждении и предлагает нам столь же убедительные аргументы, опираясь, по существу, на теорему, которую мы намерены доказывать дальше. Это ставит нас в затруднительное положение. Проходит много времени, прежде чем из многочисленных доказательств теорем учащийся самостоятельно выловит те аргументы, которые составляют основу всякого геометрического доказательства.

В настоящей книге мы делаем попытку дать такое изложение школьного курса геометрии, в котором отмеченные выше затруднения устранены. Изложение строится на простой, компактной системе аксиом, которая подготовлена знакомством с геометрией в младших классах. Всего аксиом двенадцать. Они вводятся в виде напоминания свойств простейших фигур, хорошо знакомых учащемуся.

Компактность предлагаемой системы аксиом достигается за счет подключения к ней аксиом арифметики, которые, естественно, не формулируются: свойства вещественных чисел и операции над ними предполагаются хорошо известными. Подключение арифметики осуществляется через определение равенства отрезков и углов. Именно, мы называем отрезки равными, если они имеют одинаковые длины. Аксиома об аддитивности меры отрезков и углов избавляет нас от необходимости проделать мучительный путь к обоснованию этого понятия и изучению его основных свойств в самом начале курса.

Предлагаемая система аксиом хорошо согласуется с традиционными доказательствами теорем и позволяет несколькими штрихами сделать эти доказательства совершенно безупречными. Отчетливая формулировка исходных положений позволяет дать ясное изложение вопроса о геометрическом доказательстве, которое иллюстрируется на простых примерах взаимного расположения точек и прямых.

Содержание предлагаемого курса — традиционное как по материалу, так и по его расположению. Известное усложнение, естественно вызванное строгостью доказательств, нарастает постепенно и не может создать серьезных трудностей для преподавания в школе.

В заключение отметим, что путь, избранный нами для построения школьного курса геометрии, близок пути, указанному в свое время Г. Д. Биркгофом, популярному среди американских авторов школьных учебников. Опыт американской школы дает основание утверждать разумность предлагаемого пути.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Геометрия — это наука о свойствах геометрических фигур. Слово «геометрия» греческое. В переводе на

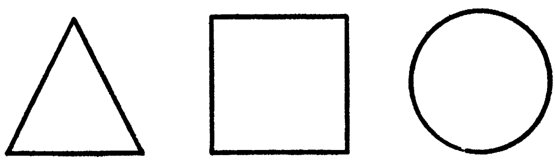

Рис. 1.

русский язык обозначает землемерие. Такое название связано с применением геометрии для измерений на местности.

Примеры геометрических фигур: треугольник, квадрат, окружность (рис. 1).

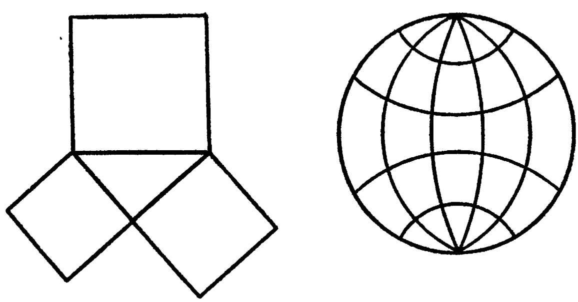

Рис. 2.

Геометрические фигуры могут быть весьма разнообразны. Часть любой геометрической фигуры является геометрической фигурой. Объединение нескольких геометрических фигур есть снова геометрическая фигура. На рис. 2 фигура слева составлена из треугольника и трех квадратов, а фигура справа состоит из окружности и частей окружности. Всякую геометрическую фигуру мы представляем себе составленной из точек.

Раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости, называется *планиметрией*. Мы начнем изучение геометрии с этого раздела.

Основные геометрические фигуры на плоскости. Основными геометрическими фигурами на плоскости являются *точка* и *прямая*. На чертеже точки и прямые наносятся остро отточенным карандашом. Для того чтобы изображение точки было отчетливым, ее обводят малым кружком. Точки принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, D, ... Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, d, ... На рис. 3 вы видите точку A и прямую a.

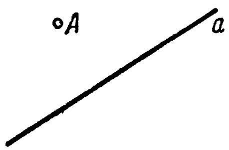

Рис. 3.

Основные свойства принадлежности точек и прямых на плоскости. Посмотрите на рис. 4. Вы видите прямые a, b и точки A, B, C. Точки A и C *лежат* на прямой a. Можно сказать также, что точки A и C *принадлежат* прямой a или что прямая a *проходит через* точки A и C.

Точка B лежит на прямой b. Она не лежит на прямой a. Точка C лежит и на прямой a и на прямой b. Прямые a и b *пересекаются* в точке C. Точка C является *точкой пересечения* прямых a и b.

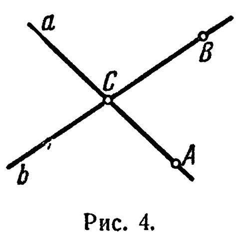

Рис. 4.

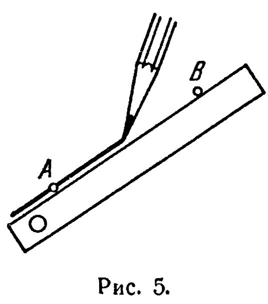

Рис. 5.

Для построения прямых на чертеже пользуются линейкой. На рис. 5 вы видите, как с помощью линейки строится прямая, проходящая через две заданные точки A и B.

Основными свойствами принадлежности точек и прямых мы будем называть следующие два свойства.

I_1. *Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие прямой, и точки, не принадлежащие прямой.*

I_2. *Каковы бы ни были две точки, существует и притом только одна прямая, проходящая через эти точки.*

Прямую можно обозначать двумя точками, лежащими на ней. Например, прямую a на рис. 4 можно обозначить AC, а прямую b можно обозначить BC.

Основные свойства взаимного расположения точек на прямой и на плоскости. Посмотрите на рис. 6. Вы видите прямую a и три точки на этой прямой: A, B, C.

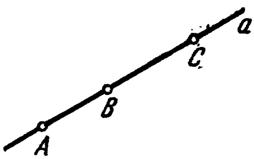

Рис. 6.

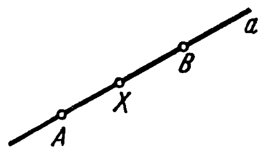

Рис. 7.

Точка B лежит *между* точками A и C. Точки A и C лежат *по разные стороны* от точки B. Точки A и C *разделяются* точкой B. Точки A и B лежат *по одну сторону* от точки C. Точки B и C лежат по одну сторону от точки A.

Пусть на прямой a лежат различные точки A и B (рис. 7). *Отрезком* AB называется часть прямой a, точками которой являются точки A и B и все точки X прямой a, лежащие между A и B. Точки A и B называются *концами* отрезка.

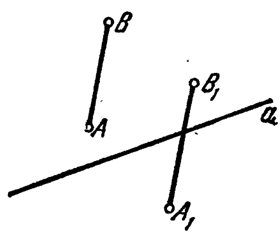

Рис. 8.

Посмотрите на рис. 8. Прямая a *разбивает* плоскость на две полуплоскости. Точки A и B лежат *в одной полуплоскости*. Отрезок AB *не пересекается* с прямой a. Точки A_1 и B_1 лежат *в разных полуплоскостях*. Отрезок A_1B_1 *пересекается* с прямой a. Полуплоскости мы будем обозначать греческими буквами α, β, γ, ...

Основными свойствами расположения точек на прямой и плоскости мы будем называть следующие два свойства.

II_1. *Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

II_2. *Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой.*

Основные свойства измерения отрезков и углов. Для измерения отрезков применяются различные измерительные инструменты. Простейшим инструментом является

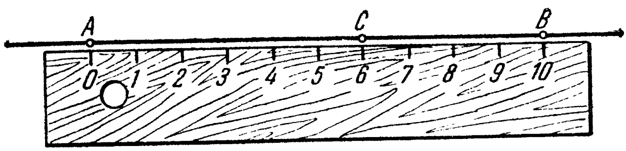

Рис. 9.

линейка с делениями на ней. На рис. 9 отрезок AB равен 10 *см*, отрезок AC равен 6 *см*, отрезок BC равен 4 *см*. Длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.

Основными свойствами измерения отрезков мы будем называть следующие свойства.

III_1. *Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.*

III_2. *Если точка C прямой AB лежит между точками A и B, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.*

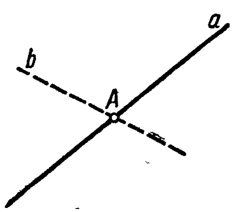

Рис. 10.

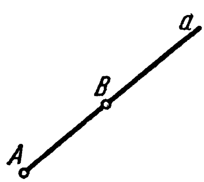

Рис. 11.

Посмотрите на рис. 10. Вы видите прямую a и точку A на ней. Проведем через точку A какую-нибудь прямую b, отличную от a. Она *разбивает* плоскость на две полуплоскости. Часть прямой a, лежащая в одной из этих полуплоскостей, называется *полупрямой*, или лучом. Точка A называется *начальной точкой* полупрямой. *Разбиение* прямой a на полупрямые не зависит от прямой b. Оно вполне определяется точкой A. Полупрямые обозначаются строчными латинскими буквами. Можно обозначать полупрямую двумя точками: начальной точкой и еще какой-нибудь точкой, принадлежащей полупрямой. При этом начальная точка ставится на первом месте. Например, полупрямую a на рис. 11 можно обозначить AB.

Углом называется фигура, которая состоит из двух полупрямых, не лежащих на одной прямой, с общей начальной точкой. Эта точка называется *вершиной угла*, а полупрямые — *сторонами угла*. На рис. 12 вы видите угол с вершиной O и сторонами a, b. Угол обозначается либо указанием его вершины, либо указанием его сторон, либо указанием трех точек: вершины и двух точек на сторонах. Слово «угол» часто заменяют значком $\angle$. Например, угол на рис. 12 можно обозначить тремя способами: $\angle O$, $\angle(a, b)$, $\angle AOB$. В третьем способе обозначения угла вершина ставится посредине.

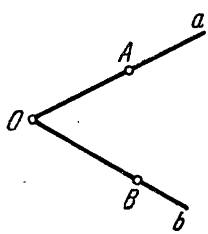

Рис. 12.

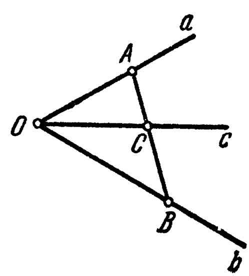

Рис. 13.

Посмотрите на рис. 13. Мы будем говорить, что полупрямая c *проходит между* сторонами a, b угла (a, b), если она пересекает какой-нибудь отрезок AB с концами на сторонах угла.

Углы измеряются в градусах при помощи транспортира. На рис. 14 угол (a, b) равен 120°. Полупрямая c проходит между сторонами угла (a, b). Угол (a, c) равен 90°, а угол (b, c) равен 30°. Угол (a, b) равен сумме углов (a, c) и (b, c).

Основными свойствами измерения углов мы будем называть следующие свойства.

III$_3$. *Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля и меньшую* 180°.

III$_4$. *Если луч с исходит из вершины угла* (*a*, *b*) *и проходит между его сторонами, то угол* (*a*, *b*) *равен сумме углов* (*a*, *c*) *и* (*b*, *c*).

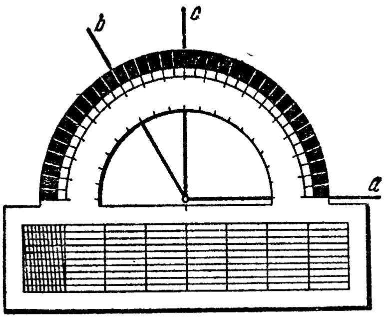

Рис. 14.

Основные свойства равенства простейших фигур. Посмотрите на рис. 15. Здесь показано, как с помощью линейки на полупрямой с начальной точкой *A* можно отложить отрезок данной длины (3 *см*).

Посмотрите на рис. 16. Полупрямая *a*, будучи продолжена за начальную точку, разбивает плоскость на две полуплоскости. На рисунке показано, как отложить в верхнюю полуплоскость от

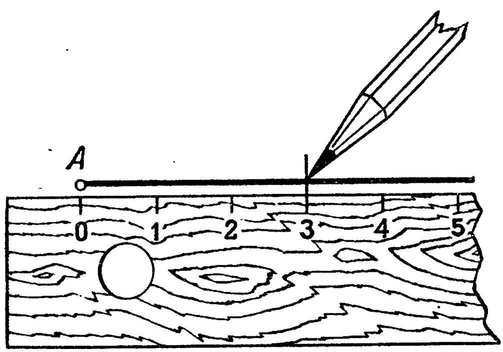

Рис. 15.

полупрямой *a* угол, заданный в градусах, при помощи транспортира.

Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки — его *сторонами*. На рис. 17 вы видите треугольник с вершинами A, B, C и со сторонами AB, BC, AC. Треугольник обозначается его вершинами.

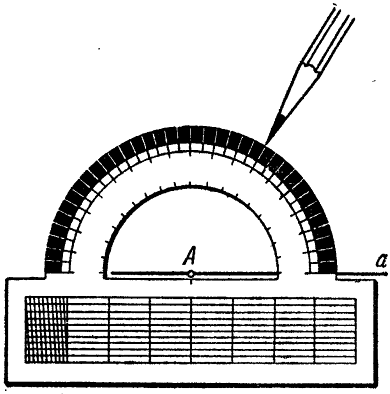

Рис. 16.

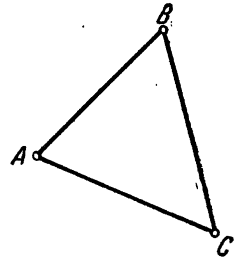

Рис. 17.

Вместо слова «треугольник» часто употребляют значок $\triangle$. Например, треугольник на рис. 17 обозначается так: $\triangle ABC$.

Два отрезка называются *равными*, если они имеют одинаковую длину. Два угла называются *равными*, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *равными*, если у них $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

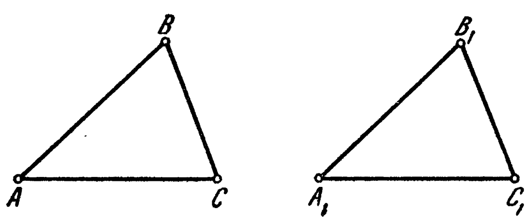

Рис. 18.

Посмотрите на рис. 18. Вы видите два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Эти треугольники построены так, что у них $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Если движением совместить вершины A и A_1, полупрямые AB и A_1B_1,

AC и A_1C_1, то вершины B и B_1, C и C_1 также совместятся, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Следующие три свойства мы будем называть основными свойствами равенства простейших фигур.

IV$_1$. *Каково бы ни было положительное число* m, *на данной полупрямой из ее начальной точки можно отложить отрезок, равный* m.

IV$_2$. *Каково бы ни было положительное число* n, *меньшее* 180, *от данной полупрямой в данную полуплоскость можно отложить угол, равный* n *градусов.*

IV$_3$. *Если у двух треугольников* ABC *и* $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, *то треугольники равны, т. е.* $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1C_1$.

Свойство IV$_3$ называется *первым признаком равенства треугольников.*

Основное свойство параллельных прямых. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются. При этом прямые считаются неограниченно продолженными в обоих направлениях. На рис. 19 показано, как с помощью угольника и линейки провести через данную точку B прямую b, параллельную прямой a.

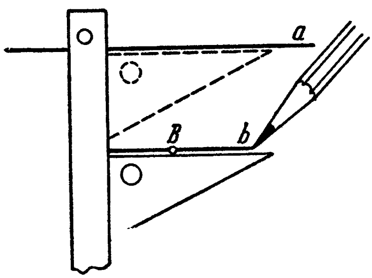

Рис. 19.

Основное свойство параллельных прямых состоит в следующем.

V. *Через данную точку* B, *не лежащую на данной прямой* a, *можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной прямой* a.

Вопросы для повторения

1. Что такое геометрия?
2. Назовите основные геометрические фигуры на плоскости.
3. Сформулируйте основные свойства принадлежности точек и прямых на плоскости.
4. Сформулируйте основные свойства расположения точек на прямой и на плоскости.
5. Сформулируйте основные свойства измерения отрезков и углов.
6. Сформулируйте основные свойства равенства простейших геометрических фигур.
7. Сформулируйте основное свойство параллельных прямых.

§ 2. АКСИОМЫ, ТЕОРЕМЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путем рассуждения. Это рассуждение называется *доказательством.* Предложение, выражающее свойство геометрической фигуры, называется *теоремой.* Таким образом, установление свойств геометрических фигур сводится к доказательству теорем.

Основные свойства I—V простейших фигур, сформулированные в предыдущем параграфе, являются отправными свойствами в доказательствах других свойств. Эти свойства не доказываются и называются *аксиомами.* Аксиома — слово греческое, в переводе на русский язык обозначает «предложение, не вызывающее сомнений».

Аксиомы выражают собой отношения, в которых находятся основные понятия. В нашем изложении такими понятиями являются понятия, выражаемые словами: «точка», «прямая», «принадлежать» (для точек и прямых), «лежать между» (для точек на прямой), «мера» (длина для отрезков, градусная мера для углов). Эти понятия взаимно определяются системой аксиом. Другие понятия, относящиеся к геометрическим фигурам, являются производными и определяются явно через указанные основные. Таковы, например, понятие отрезка, угла, треугольника.

При доказательстве теорем разрешается пользоваться основными свойствами простейших фигур, т. е. аксиомами, а также свойствами уже доказанными, т. е. доказанными теоремами. Никакими другими свойствами фигур, даже если они не вызывают сомнений, пользоваться нельзя.

При доказательстве теоремы разрешается пользоваться чертежом как геометрической записью того, что мы выражаем словами. Не разрешается использовать в рассуждении свойства фигуры, видные из чертежа, если мы не можем обосновать их, опираясь на аксиомы и теоремы, доказанные ранее.

Формулировка теоремы обычно состоит из двух частей. В одной части говорится о том, что дано. Эта часть называется *условием теоремы.* В другой части говорится о том, что должно быть доказано. Эта часть называется *утверждением теоремы.*

Умение доказывать теоремы приобретается опытом. Однако есть общее правило, с чего надо начинать доказательство теоремы. Прежде всего надо уяснить, что дано и что требуется доказать. Часто понимание теоремы подсказывает путь к ее доказательству. Рассмотрим несколько примеров.

Теорема 2.1 *). *Если прямая a не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает его сторону BC, то она пересекает одну и только одну из двух других сторон.*

Условие этой теоремы состоит в том, что прямая a не проходит ни через точку A, ни через точку B, ни через точку C и пересекает отрезок BC. Утверждение теоремы состоит в том, что прямая пересекает один и только один из двух других отрезков AB или AC.

Уясним формулировку теоремы. Что значит: прямая a пересекает отрезок BC? Это значит, что точки B и C

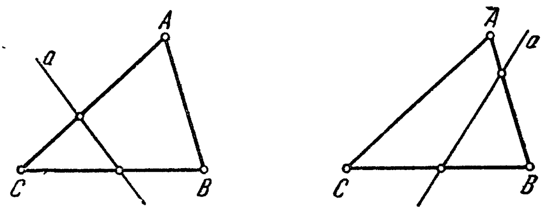

Рис. 20.

лежат в разных полуплоскостях, на которые плоскость разбивается прямой a. Такое понимание условия теоремы подсказывает доказательство.

Действительно, вершины B и C лежат в разных полуплоскостях. Вершина A лежит в одной из этих полуплоскостей. Если она лежит в той же полуплоскости, что и вершина B, то отрезок AC пересекается с прямой a, а отрезок AB не пересекается (рис. 20, слева). Если же вершина A лежит в той полуплоскости, в которой лежит вершина C, то отрезок AB пересекается с прямой a, а отрезок AC не пересекается (рис. 20, справа). Таким образом, в любом случае прямая a пересекает одну и только одну из двух других сторон треугольника. Вот и все доказательство.

Теорема 2.2. *Если точка C прямой AB лежит между точками A и B, то $AC < AB$.*

---

*) В нумерации теорем первое число указывает параграф, а второе — порядковый номер предложения (теоремы или задачи) внутри параграфа.

Доказательство. Условие теоремы состоит в том, что точка C лежит на прямой AB между точками A и B. Утверждение теоремы в том, что длина отрезка AC меньше длины отрезка AB.

По свойству измерения отрезков (аксиома III_2) длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC. Поэтому $AC < AB$. Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Если точка A на прямой BC не разделяет точки B и C и если $AC < AB$, то точка C лежит между A и B.*

Доказательство. В условии теоремы сказано, что три точки A, B, C лежат на прямой. Далее сказано, что точка A не разделяет точек B и C, т. е. не лежит между ними. Наконец, сказано, что отрезок AC меньше отрезка AB. Утверждение теоремы в том, что точка C лежит между A и B.

По свойству расположения трех точек на прямой (аксиома II_1) одна и только одна из трех точек A, B, C лежит между двумя другими. По условию теоремы этой точкой не может быть точка A. Поэтому теорема будет доказана, если будет доказано, что и B не может лежать между A и C.

Допустим, однако, что точка B лежит между A и C. Тогда по теореме 2.2 $AB < AC$. Но это противоречит условию теоремы: $AC < AB$. Отсюда мы заключаем, что C лежит между A и B. Теорема доказана.

Способ рассуждений, который мы применили в доказательстве этой теоремы, называется *доказательством от противного*. Доказательство от противного применяется очень часто. Сущность его состоит в том, что делается предположение, противоположное тому, что утверждается теоремой. А затем путем рассуждений выводится следствие из этого предположения, противоречащее условию теоремы.

Поясним сказанное на примере доказательства теоремы 2.3. По условию теоремы точка A не лежит между B и C. Поэтому остаются две возможности: либо B между A и C, либо C между A и B. Теоремой утверждается, что точка C лежит между A и B. Противоположное утверждение состоит в том, что C не лежит между A и B, т. е. B лежит между A и C. Сделав это предположение, мы получили следствие ($AB < AC$), противоречащее условию теоремы.

Теорема 2.4. *Если конец A отрезка AB лежит на прямой a, а конец B не лежит на этой прямой, то все точки отрезка AB, кроме точки A, лежат в одной из полуплоскостей, на которые прямая a разбивает плоскость.*

Доказательство. Применим доказательство от противного. Точка B лежит в одной из полуплоскостей. Теоремой утверждается, что все точки отрезка AB, кроме точки A, лежат в той же полуплоскости. Допустим, что некоторая точка C отрезка AB лежит в другой полуплоскости. Тогда отрезок BC пересекается с прямой a в некоторой точке.

Этой точкой не может быть точка A, так как она не лежит между B и C. В самом деле, точка C лежит между A и B, а из трех точек A, B, C только одна лежит между двумя другими. Таким образом, отрезок BC пересекается с прямой a в некоторой точке A_1, отличной от A. Следовательно, прямая a и прямая AB пересекаются в двух точках: A и A_1.

По свойству принадлежности точек и прямых (аксиома I_2) через точки A и A_1 проходит одна и только одна прямая. Поэтому прямая AB есть не что иное, как прямая a, а значит, точка B лежит на прямой a, вопреки условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2.5. *Пусть a — прямая, A — точка на ней и a_1, a_2 — две полупрямые, на которые прямая a разбивается точкой A. Пусть b_1 и c_1 — две полупрямые с начальной точкой A, расположенные в одной из полуплоскостей, на которые прямая a разбивает плоскость* (рис. 21).

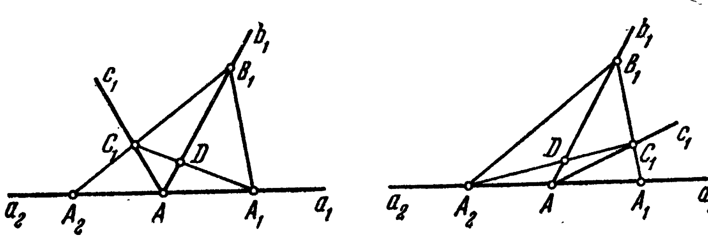

Рис. 21.

Тогда либо полупрямая b_1 проходит между a_1 и c_1, а полупрямая c_1 проходит между b_1 и a_2 (рис. 21, слева), *либо c_1 проходит между a_1 и b_1, а b_1 проходит между c_1 и a_2* (рис. 21, справа).

Доказательство. Обозначим через b и c прямые, которые содержат полупрямые b_1 и c_1. Отметим на полупрямых a_1, a_2 и b_1 точки A_1, A_2 и B_1 (рис. 21). Прямая c пересекает сторону A_1A_2 треугольника $A_1A_2B_1$. По теореме 2.1 она пересекает одну из двух других сторон A_1B_1 или A_2B_1. Допустим, прямая c пересекает сторону A_2B_1 (рис. 21, слева).

По теореме 2.4 отрезок A_2B_1 кроме точки A_2 лежит в одной полуплоскости относительно прямой a. Поэтому точка пересечения C_1 отрезка A_2B_1 с прямой c принадлежит полупрямой c_1. А это значит, что c_1 проходит между b_1 и a_2. Докажем, что b_1 проходит между a_1 и c_1.

Соединим точки A_1 и C_1 отрезком A_1C_1. Прямая b пересекает сторону A_1A_2 треугольника $A_1A_2C_1$. Поэтому она пересекает одну из двух других сторон. Прямая b пересекает прямую A_2C_1 в точке B_1, которая не принадлежит отрезку A_2C_1. Поэтому прямая b не может пересекать отрезок A_2C_1. В противном случае прямые A_2C_1 и b имели бы две общие точки и три точки A, A_2, B_1 лежали бы на одной прямой, т. е. на прямой a. Итак, прямая b пересекает сторону A_1C_1 треугольника $A_1A_2C_1$. Так же как и в предыдущем рассуждении, заключаем, что точка пересечения принадлежит полупрямой b_1. А это значит, что полупрямая b_1 проходит между a_1 и c_1.

Итак, если прямая b пересекает сторону A_2B_1 треугольника $A_2B_1A_1$, то c_1 проходит между b_1 и a_2, а b_1 проходит между a_1 и c_1. Теперь надо рассмотреть тот случай, когда прямая b пересекает сторону A_1B_1 треугольника $A_1B_1A_2$ (рис. 21, справа). В этом случае получается, что полупрямая c_1 проходит между a_1 и b_1, а полупрямая b_1 проходит между c_1 и a_2. Читателю предлагается провести это рассуждение самостоятельно.

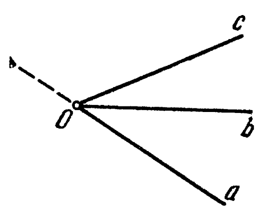

Рис. 22.

Теорема 2.6. *Пусть a, b, c — три полупрямые, исходящие из точки O. Пусть полупрямые b и c расположены в одной из полуплоскостей, определяемых полупрямой a и ее продолжением* (рис. 22). *Тогда:*

1) *если полупрямая b проходит между a и c, то угол (a, b) меньше угла (a, c);*

2) *если угол (a, b) меньше угла (a, c), то полупрямая b проходит между a и c.*

Доказательство. Эта теорема содержит два утверждения: 1) и 2). Начнем с первого. Согласно свойству измерения углов (аксиома III_4), если полупрямая b проходит между a и c, то угол (a, c) равен сумме углов (a, b) и (b, c). Поэтому угол (a, b) меньше угла (a, c). Утверждение 1) теоремы доказано.

Докажем утверждение 2). Согласно теореме 2.5 либо полупрямая b проходит между a и c, либо полупрямая c проходит между a и b. Допустим, что c проходит между a и b. Тогда по первой части теоремы, которая уже доказана, угол (a, c) меньше угла (a, b). Но это противоречит условию теоремы, поэтому случай, когда c проходит между a и b невозможен. Следовательно, b проходит между a и c. Теорема доказана полностью.

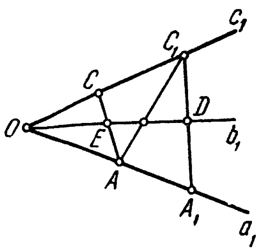

Рис. 23.

Теорема 2.7. *Если полупрямая b_1 проходит между полупрямыми a_1 и c_1, то она пересекает любой отрезок AC с концами на полупрямых a_1 и c_1* (рис. 23).

Доказательство. Пусть b — прямая, содержащая полупрямую b_1. По условию теоремы полупрямая b_1 проходит между a_1 и c_1. Это значит, что она пересекает некоторый отрезок A_1C_1 с концами на полупрямых a_1 и c_1 в некоторой точке D. Прямая b пересекает этот отрезок в той же точке D. По теореме 2.1 прямая b пересекает сторону C_1A треугольника AC_1A_1, следовательно, по той же теореме, прямая b пересекает сторону AC треугольника ACC_1 в некоторой точке E. Точка E лежит в той же полуплоскости относительно прямой, содержащей полупрямую a_1, что и полупрямая b_1. Поэтому точка пересечения прямой b с отрезком AC принадлежит полупрямой b_1. Теорема доказана.

§ 3. РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 3.1. *Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то треугольники равны* (рис. 24). *Именно, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.*

Доказательство. Отложим на полупрямой AC отрезок AC_2, равный A_1C_1. Треугольник AC_2B равен треугольнику $A_1C_1B_1$ по первому признаку равенства треугольников (аксиома IV_3). Действительно, $AC_2=A_1C_1$ по построению, а $AB=A_1B_1$ и $\angle A=\angle A_1$ по условию теоремы. Если точка C_2 совпадает с C, то треугольник ABC_2

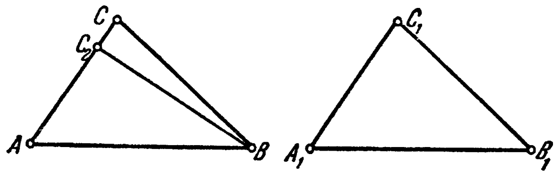

Рис. 24.

совпадает с треугольником ABC и, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Допустим, точка C_2 не совпадает с C. Тогда либо точка C_2 лежит между A и C, как на рис. 24, либо C лежит между A и C_2. Рассмотрим первый случай. В этом случае полупрямая BC_2 проходит между полупрямыми BA и BC, так как пересекает отрезок AC. По теореме 2.6 угол ABC_2 меньше угла ABC. Но это невозможно, так как угол ABC равен углу $A_1B_1C_1$ по условию теоремы, а угол $A_1B_1C_1$ равен углу ABC_2 по доказанному. Итак, точка C_2 не может быть между A и C. Аналогично доказывается, что точка C не может быть между A и C_2. Теорема доказана.

Теорема 3.1 называется *вторым признаком равенства треугольников.*

Равнобедренным треугольником называется такой треугольник, у которого две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием* треугольника.

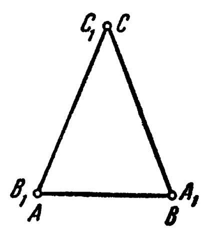

Рис. 25.

Теорема 3.2. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Именно, если $AC=BC$ в треугольнике ABC, то $\angle A=\angle B$.*

Доказательство. Переобозначим вершины треугольника. Именно, вершину A обозначим B_1, вершину B обозначим A_1, а вершину C обозначим C_1 (рис. 25). Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников, так как $\angle C = \angle C_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Поэтому $\angle A = \angle A_1$, т. е. $\angle B = \angle A$. Теорема доказана.

Треугольник называется *равносторонним*, если все его стороны равны. Из теоремы 3.2 следует, что *в равностороннем треугольнике все углы равны.*

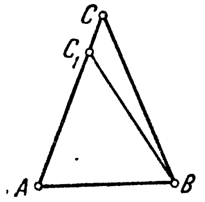

Рис. 26.

Теорема 3.3. *Если $\angle A = \angle B$ в треугольнике ABC, то треугольник равнобедренный. Именно, $AC = BC$.*

Доказательство. Допустим, утверждение теоремы неверно и $BC < AC$. Отложим на полупрямой AC отрезок AC_1, равный BC (рис. 26). Точка C_1 лежит между A и C. Треугольники C_1AB и CBA равны, так как у них сторона AB общая, $AC_1 = CB$ по построению, а углы CBA и C_1AB равны по условию теоремы. Поэтому углы CAB и C_1BA равны. А значит, равны углы CBA и C_1BA. Но это невозможно, так как полупрямая BC_1 проходит между сторонами угла CBA. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 3.3 является *обратной* теореме 3.2. Утверждение теоремы 3.2 является условием теоремы 3.3, а условие теоремы 3.2 является утверждением теоремы 3.3. Не всякая теорема имеет обратную. А именно, если данная теорема верна, то обратная может быть неверна.

Теорема 3.4. *Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, то треугольники равны, т. е. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.*

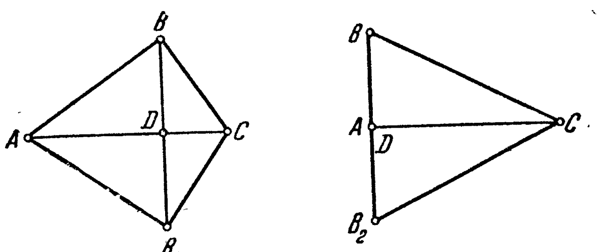

Рис. 27.

Доказательство. Прямая AC разбивает плоскость на две полуплоскости (рис. 27, слева). Точка B лежит в одной из этих полуплоскостей. Отложим от полупрямой AC в другую полуплоскость угол, равный $\angle A_1$, и на его стороне отложим отрезок AB_2, равный A_1B_1. Треугольники ACB_2 и $A_1C_1B_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда заключаем, что $AB_2 = A_1B_1 = AB$, $CB_2 = C_1B_1 = CB$.

Отрезок BB_2 пересекает прямую AC в некоторой точке D. Могут представиться два случая: 1) точка D не совпадает ни с одной из точек A и C, 2) точка D совпадает с одной из этих точек. В первом случае одна из трех точек A, C, D лежит между двумя другими. Допустим сначала, что точка D лежит между A и C, как изображено на рис. 27, слева.

Треугольник ABB_2 равнобедренный, так как $AB = AB_2$. По теореме 3.2 угол ABB_2 равен углу AB_2B. Треугольник BCB_2 также равнобедренный. У него угол BB_2C равен углу B_2BC. Так как полупрямая BD проходит между сторонами угла ABC, то угол ABC равен сумме углов ABB_2 и B_2BC. Аналогично угол AB_2C равен сумме углов AB_2B и BB_2C. Поэтому углы ABC и AB_2C равны. По первому признаку равенства треугольников треугольники ABC и AB_2C равны, так как у них $AB = AB_2$, $BC = B_2C$ и $\angle ABC = \angle AB_2C$. Так как треугольник AB_2C равен треугольнику $A_1B_1C_1$, то получается, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Случай, когда точка C лежит между A и D, и случай, когда точка A лежит между C и D, рассматриваются аналогично. Предлагается провести это рассмотрение самостоятельно.

Допустим теперь, что точка D совпадает с одной из точек A или C. Пусть для определенности точка D совпадает с A (рис. 27, справа). Треугольник BCB_2 равнобедренный, так как $BC = B_2C$. Отсюда по теореме 3.2 $\angle B = \angle B_2$. Треугольники ABC и AB_2C равны по первому признаку равенства. У них $AB = AB_2$, $BC = B_2C$ и $\angle B = \angle B_2$. Так как треугольник AB_2C равен треугольнику $A_1B_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Случай, когда точка D совпадает с точкой C, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3.4 называется *третьим признаком равенства треугольников*.

Срединой отрезка AB называется такая точка C, что $AC = CB$. По свойству измерения отрезков (аксиома III_2) каждый из отрезков AC и CB равен половине отрезка AB.

Медианой, проведенной из вершины C треугольника ABC, называется отрезок, соединяющий вершину C со срединой противоположной стороны, т. е. стороны AB. В треугольнике имеется три медианы.

Любые две медианы треугольника пересекаются. Действительно, проведем медианы в треугольнике ABC из двух вершин, например A и B (рис. 28). По теореме 2.1 в применении к треугольнику ACA_1 прямая BB_1 пересекает медиану AA_1. По той же причине прямая AA_1 пересекает медиану BB_1. Таким образом, прямые AA_1 и BB_1 пересекаются. Так как эти прямые различны, то они могут иметь только одну общую точку. Эта точка принадлежит медиане AA_1 и медиане BB_1. Следовательно, медианы пересекаются.

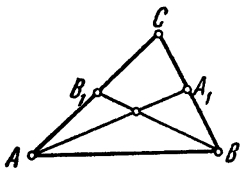

Рис. 28.

Биссектрисой угла (a, b) называется полупрямая c, проведенная из вершины угла между его сторонами, делящая угол (a, b) на равные части: $\angle(a, c) = \angle(c, b)$. По свойству измерения углов (аксиома III_4) каждый из углов (a, c) и (c, b) равен половине угла (a, b).

По теореме 2.7 биссектриса угла треугольника пересекает противолежащую сторону.

Биссектрисой треугольника ABC, проведенной из вершины A, называется отрезок биссектрисы угла A с концами в точке A и точке пересечения с противоположной стороной, т. е. со стороной BC. В треугольнике три биссектрисы. *Любые две биссектрисы треугольника пересекаются.*

Теорема 3.5. *В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является одновременно биссектрисой.*

Предлагается доказать эту теорему в качестве упражнения.

Упражнения

1. Привести полное доказательство теоремы 3.4, разобрав все случаи расположения точки D на прямой AC.
2. Привести доказательство теоремы: любые две биссектрисы треугольника пересекаются.
3. Доказать теорему 3.5.

4. Доказать, что у равных треугольников соответствующие медианы равны, соответствующие биссектрисы равны. *Соответствующими* медианами (биссектрисами) называются такие, которые проведены из соответствующих вершин.

5. Доказать, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные из углов при основании, равны, биссектрисы, проведенные из углов при основании, равны.

6. На сторонах a и a_1 угла с вершиной O отложены отрезки $OA = OA_1$ и $OB = OB_1$ (рис. 29). Доказать, что отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются и притом на биссектрисе угла.

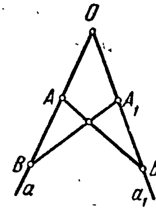

Рис. 29.

§ 4. СМЕЖНЫЕ УГЛЫ. ПРЯМОЙ УГОЛ

Пусть a и b — две пересекающиеся прямые. Точкой пересечения O прямая a разбивается на полупрямые a_1 и a_2, а прямая b разбивается на полупрямые b_1 и b_2 (рис. 30). Углы (a_1, b_1) и (a_2, b_1) называются *смежными*. Углы (a_1, b_1) и (a_2, b_2) называются *вертикальными*.

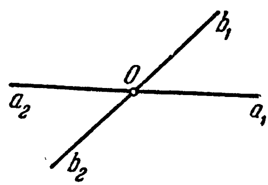

Рис. 30.

Теорема 4.1. *Если два угла равны, то смежные с ними углы равны.*

Доказательство. Пусть углы (a, c) и (a_1, c_1) равны (рис. 31). Докажем, что смежные с ними углы (b, c) и (b_1, c_1) равны. Отметим на полупрямых a, b, c какие-нибудь три

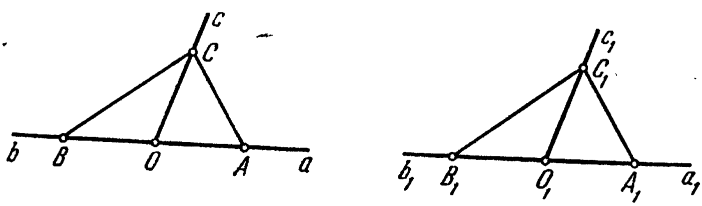

Рис. 31.

точки A, B, C. Отложим на полупрямых a_1, b_1, c_1 отрезки O_1A_1, O_1B_1 и O_1C_1, равные OA, OB и OC соответственно.

Треугольники OAC и $O_1A_1C_1$ равны, так как углы AOC и $A_1O_1C_1$ равны по условию теоремы, а $OA = O_1A_1$

и $OC = O_1C_1$ по построению. Следовательно, углы $C_1A_1O_1$ и CAO равны и $AC = A_1C_1$.

По свойству измерения отрезков (аксиома III_2) $AB = A_1B_1$. Поэтому треугольники BAC и $B_1A_1C_1$ равны. Следовательно, $BC = B_1C_1$. Треугольники BCO и $B_1C_1O_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда заключаем о равенстве углов BOC и $B_1O_1C_1$, т. е. углов (b, c) и (b_1, c_1). Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Вертикальные углы равны.*

Доказательство (рис. 30). Угол (b_1, a_2) является смежным для углов (a_1, b_1) и (a_2, b_2). По теореме 4.1 отсюда следует, что вертикальные углы (a_1, b_1) и (a_2, b_2) равны. Теорема доказана.

Угол называется *прямым*, если он равен своему смежному.

Теорема 4.3. *Прямой угол равен* $90°$.

Доказательство. Пусть (a_1, b) — прямой угол (рис. 32). Это значит, что он равен углу (a_2, b). Обозначим через m градусную меру прямого угла (a_1, b). Если $m \neq 90$, то либо $m < 90$, либо $m > 90$. Предположим сначала, что $m < 90$.

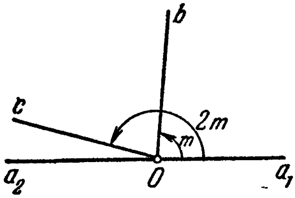

Рис. 32.

Так как $2m < 180$, то по аксиоме IV_2 существует угол (a_1, c), равный $2m$. По теореме 2.5 в расположении четырех лучей a_1, b, c, a_2 могут быть только две возможности: 1) b проходит между a_1 и c, а c проходит между a_2 и b, 2) c проходит между a_1 и b, а b проходит между a_2 и c. По теореме 2.6 второй случай исключается, так как угол (a_1, c), равный $2m$, больше угла (a_1, b), равного m. Итак, b проходит между a_1 и c, а c проходит между a_2 и b.

По свойству измерения углов (аксиома III_4) угол (a_1, c) равен сумме углов (a_1, b) и (b, c). Поэтому угол (b, c) равен m. Угол (b, a_2) равен сумме углов (b, c) и (c, a_2), следовательно, больше m. С другой стороны, угол (b, a_2) равен m, как смежный к прямому углу, равному m. Мы пришли к противоречию.

Допустим теперь, что $m > 90$. Возьмем число $n = m - 90$. Оно меньше m. Отложим угол, равный n, от полупрямой a_2 (рис. 33). Так как $n < m$, то полупрямая c проходит между a_2 и b. Отсюда по теореме 2.6 заключаем, что b проходит между a_1 и c. По свойству измерения углов угол (b, c) равен $m-n$, так как угол (b, a_2) равен m, а угол (a_2, c) равен n. Угол (a_1, c) равен сумме углов (a_1, b) и (b, c), следовательно, равен $m+(m-n)=m+90>180$. Но это невозможно, так как каждый угол по аксиоме III_3 имеет градусную меру, меньшую $180°$. Итак, оба предположения, $m<90$ и $m>90$, приводят к противоречию. Следовательно, $m=90$. Теорема доказана.

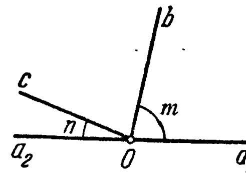

Рис. 33.

Угол, меньший прямого, называется *острым*, угол, больший прямого, называется *тупым*.

Теорема 4.4. *Сумма смежных углов равна двум прямым, т. е.* $180°$.

Доказательство. Пусть (a_1, b) и (a_2, b) — смежные углы (рис. 34). Если угол (a_1, b) прямой, то смежный угол (a_2, b) тоже прямой и их сумма равна двум прямым. Допустим, что угол (a_1, b) не прямой. Отложим от полупрямой a_1 прямой угол (a_1, c) (рис. 34). По теореме 2.5 в расположении четырех лучей a_1, b, c, a_2 могут быть только две возможности: 1) b проходит между a_1 и c, а c проходит между a_2 и b; 2) c проходит между a_1 и b, а b проходит между a_2 и c.

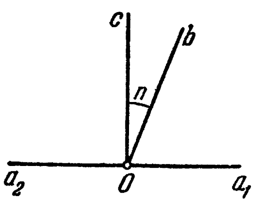

Рис. 34.

Рассмотрим первый случай. Пусть угол между лучами b и c равен n. Тогда по свойству измерения углов угол (a_1, c) равен сумме углов (a_1, b) и (b, c). Поэтому угол (a_1, b) равен $90-n$. Далее, угол (a_2, b) равен сумме углов (a_2, c) и (c, b), т. е. равен $90+n$. Поэтому сумма углов (a_1, b) и (a_2, b) равна $(90-n)+(90+n)$, т. е. $180°$.

Второй случай, когда c проходит между a_1 и b, а b проходит между a_2 и c, рассматривается аналогично. Предлагается читателю провести это рассмотрение самостоятельно. В этом случае также получается, что сумма углов (a_1, b) и (a_2, b) равна $180°$. Теорема доказана.

Две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Теорема 4.5. *Через каждую точку плоскости можно провести и притом только одну прямую, перпендикулярную данной.*

Доказательство. Пусть A — данная точка и a — данная прямая. В расположении точки A и прямой a могут быть две возможности: 1) точка A лежит на прямой a; 2) точка A не лежит на прямой a. Рассмотрим сначала случай, когда точка A лежит на прямой a (рис. 35). Точка A разбивает прямую a на две полупрямые a_1 и a_2. По аксиоме IV_2 от полупрямой a_1 можно отложить угол (a_1, b), равный 90°, в любую полуплоскость, определяемую прямой a. Прямая, содержащая луч b, проходит через точку A и пересекает прямую a под прямым углом.

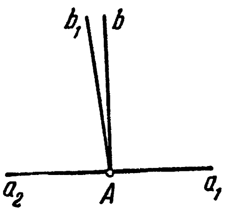

Рис. 35.

Покажем, что эта прямая единственная. Допустим, существует другая прямая, также проходящая через точку A и пересекающая прямую a под прямым углом. Обозначим через b_1 полупрямую этой прямой, лежащую в одной полуплоскости с b (см. рис. 35).

По теореме 2.5 либо b проходит между a_1 и b_1, либо b_1 проходит между a_1 и b. Так как оба угла (a_1, b) и (a_1, b_1) прямые, т. е. равны 90°, то оба расположения лучей невозможны по теореме 2.6. Таким образом, через точку A проходит только одна прямая, перпендикулярная прямой a.

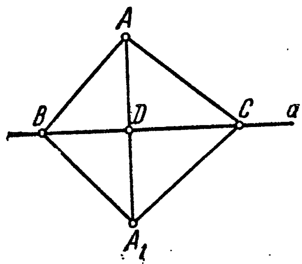

Рис. 36.

Пусть теперь точка A не лежит на прямой a (рис. 36). Отметим на прямой a две произвольные точки B и C. Точка A лежит в одной из полуплоскостей, на которые прямая a разбивает плоскость. Отложим от полупрямой BC в другую полуплоскость угол, равный ABC. На стороне этого угла отложим отрезок BA_1, равный BA. Треугольники ABC и A_1BC равны, так как у них сторона BC общая, а углы ABC, A_1BC и стороны AB, A_1B равны по построению. Отсюда следует, что $AC = A_1C_1$ и $\angle ACB = \angle A_1CB$.

Точки A и A_1 находятся в разных полуплоскостях относительно прямой a. Поэтому отрезок AA_1 пересекается с прямой a в некоторой точке D. По крайней мере одна из точек B, C отлична от D (на рис. 36 обе точки отличны от D). Пусть для определенности B отлична от D. Треугольники BAD и BA_1D равны. Так как углы D этих треугольников являются смежными, то они прямые. Таким образом, прямая AA_1 пересекает прямую a под прямым углом.

Докажем единственность прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой a. Допустим, что, кроме построенной прямой AA_1, есть другая прямая, проходящая через точку A и пересекающая прямую a под прямым углом. Обозначим эту прямую b, а точку ее пересечения с прямой a обозначим D_1 (рис. 37).

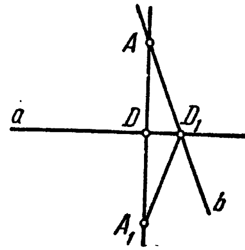

Рис. 37.

Точка D_1 отлична от D, так как через две точки (A и D) можно провести только одну прямую (аксиома I_2). Треугольники ADD_1 и A_1DD_1 равны, так как у них сторона DD_1 общая, $AD=A_1D$, а углы при вершине D прямые. Поэтому углы AD_1D и A_1D_1D равны. Но угол AD_1D прямой. Поэтому угол A_1D_1D тоже прямой. Полупрямая D_1D пересекает отрезок AA_1 с концами на сторонах угла AD_1A_1. Следовательно, угол AD_1A_1 равен сумме углов AD_1D и A_1D_1D, т. е. равен 180°. А это невозможно по аксиоме III_3. Итак, не существует другой прямой, проходящей через точку A, пересекающей прямую a под прямым углом.

Теорема доказана.

Упражнения

1. Доказать, что биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.

2. Из точки O исходят три луча a_1, a_2, a_3. Никакие два луча не лежат на одной прямой. Доказать, что сумма углов (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1) не больше 360°.

3. Доказать, что две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются.

4. Доказать, что в треугольнике не может быть двух прямых углов.

§ 5. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Внешним углом треугольника ABC при вершине A называется угол, смежный углу A.

Теорема 5.1. *Внешний угол треугольника ABC при вершине A больше угла B и больше угла C. Короче говоря, внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла треугольника, не смежного с ним.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 38). Обозначим O средину стороны AC. Отложим на полупрямой BO отрезок BD, равный $2BO$. Тогда $OD = OB$, точка O лежит между B и D, Отметим на полупрямой BA точку E так, чтобы точка A была между B и E. Полупрямая AO проходит между AB и AD, так как она пересекает отрезок BD. Поэтому по теореме 2.5 полупрямая AD проходит между AC и AE. По свойству измерения углов угол OAD меньше угла OAE, внешнего угла треугольника ABC при вершине A.

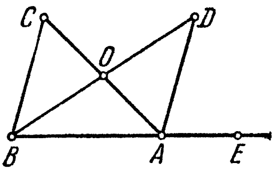

Рис. 38.

Треугольники BOC и DOA равны, так как у них $AO = CO$, $DO = BO$ по построению, а углы при вершине O равны, как вертикальные. Из равенства этих треугольников следует, что угол BCO равен углу DAO. А по доказанному угол DAO меньше внешнего угла треугольника ABC при вершине A, Итак, угол C треугольника меньше внешнего угла при вершине A. Аналогично доказывается, что угол B треугольника также меньше внешнего угла при вершине A. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *У каждого треугольника по крайней мере два угла острых, т. е. меньше прямого.*

Доказательство. Допустим угол A треугольника ABC не меньше прямого. Тогда внешний угол при вершине A, как смежный углу A, будет не больше прямого, По теореме 5.1 углы B и C треугольника меньше внешнего угла треугольника при вершине A, т. е. острые. Теорема доказана.

Теорема 5.3. *Если $AB > BC$ в треугольнике ABC, то $\angle C$ больше $\angle A$. И обратно, если $\angle C$ больше $\angle A$, то $AB > BC$. Короче говоря, в треугольнике против* *большей стороны лежит больший угол, против большего угла лежит бо́льшая сторона.*

Доказательство. Пусть $AB > BC$ в треугольнике ABC (рис. 39). Отложим на полупрямой BA отрезок BC_1, равный BC. Точка C_1 лежит между A и B. Полупрямая CC_1 проходит между CA и CB, так как пересекает отрезок AB. Поэтому угол BCC_1 меньше угла BCA, т. е. угла C треугольника ABC. Углы BCC_1 и BC_1C равны, как углы при основании равнобедренного треугольника CBC_1. Угол BC_1C является внешним углом для треугольника AC_1C при вершине C_1 и поэтому больше угла A. В итоге угол C треугольника ABC больше угла A этого треугольника. Первое утверждение теоремы доказано.

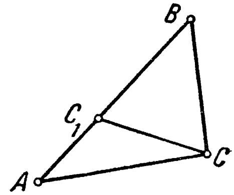

Рис. 39.

Докажем теперь, что, если $\angle C$ больше $\angle A$, то $AB > BC$. Допустим, утверждение неверно. Тогда либо $AB = BC$, либо $AB < BC$. В первом случае треугольник ABC равнобедренный и, следовательно, углы A и C при его основании равны. Но это противоречит условию: $\angle C$ больше $\angle A$. Если же $AB < BC$, то по доказанному $\angle A$ больше $\angle C$, что также противоречит условию. Итак, если $\angle C$ больше $\angle A$, то $AB > BC$. Теорема доказана полностью.

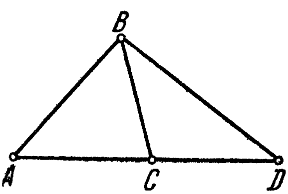

Рис. 40.

Теорема 5.4. *У каждого треугольника сумма двух сторон больше третьей стороны.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 40). Докажем, что $AB < AC + CB$. Отложим на полупрямой AC отрезок AD, равный $AC + CB$. Тогда точка C будет между A и D, а $CD = CB$. Углы B и D треугольника BCD равны, как углы при основании равнобедренного треугольника. Угол ABD больше угла CBD, так как полупрямая BC проходит между BA и BD. Таким образом, угол ABD больше угла ADB. По теореме 5.3 отсюда заключаем, что $AD > AB$, т. е. $AC + BC > AB$. Теорема доказана.

Ломаной называется фигура, которая состоит из точек A_1, A_2, A_3, ..., A_n и отрезков, соединяющих последовательные точки: A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Точки A_1, A_2, A_3, ... называются *вершинами* ломаной, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ... называются *звеньями* ломаной. Точки A_1 и A_n называются *концами* ломаной. *Длиной ломаной* называется сумма длин ее звеньев. На рис. 41 изображена ломаная с вершинами A_1, A_2, ..., A_6.

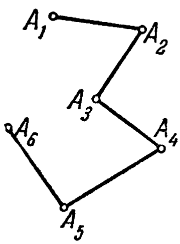

Рис. 41.

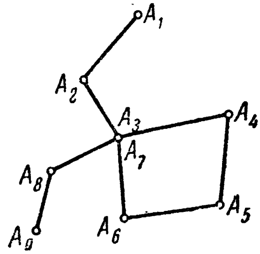

Рис. 42.

Теорема 5.5. *Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.*

Доказательство. Если некоторые вершины ломаной совпадают, то мы выбросим часть ломаной между этими вершинами. При этом длина ее только уменьшится. Так, на рис. 42 изображена ломаная, у которой совпадают вершины A_3 и A_7. От этой ломаной мы перейдем к ломаной $A_1A_2A_3A_8A_9$. Эта ломаная имеет длину меньшую, чем исходная. Таким путем, не увеличивая длину ломаной, мы можем прийти к ломаной с теми же концами, у которой все вершины будут различны. Допустим, исходная ломаная $A_1A_2 \ldots A_n$ уже обладает этим свойством.

Рассмотрим ломаную $A_1A_3A_4 \ldots A_n$. Вместо звеньев A_1A_2 и A_2A_3 она имеет звено A_1A_3. Если точки A_1, A_2, A_3 не лежат на одной прямой, то по теореме 5.4 $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$. Поэтому новая ломаная имеет длину меньшую, чем исходная. Допустим, точки A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой. Тогда одна из них лежит между двумя другими. Если это точка A_2, то $A_1A_3 = A_1A_2 + A_2A_3$. Если точка A_1 лежит между A_2 и A_3, то $A_1A_3 < A_2A_3$ и, тем более, $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$. То же заключение в случае, когда точка A_2 лежит между A_1 и A_3. Одним словом, переход к ломаной $A_1A_3 \ldots A_n$ не увеличивает длины ломаной.

Затем мы перейдем к ломаной $A_1A_4 \ldots A_n$, опуская вершину A_3, и т. д. В конце концов, мы придем к ломаной A_1A_n с одним звеном, которое представляет собой отрезок, соединяющий концы исходной ломаной. Так как каждый раз длина ломаной не увеличивалась, то исходная ломаная имеет длину, не меньшую длины отрезка, соединяющего ее концы. Теорема доказана.

Пусть a — прямая и A — точка, не лежащая на этой прямой (рис. 43). Отрезок AB с концом B на прямой a называется *перпендикуляром*, опущенным из точки A на прямую a, если прямые a и AB перпендикулярны, т. е. пересекаются под прямым углом. Точка B называется *основанием* перпендикуляра. Согласно теореме 4.5 из точки A на прямую a можно опустить и притом только один перпендикуляр.

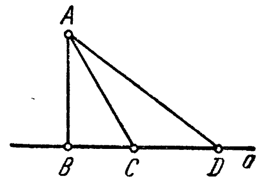

Рис. 43.

Пусть C — точка на прямой a, отличная от точки B. Тогда отрезок AC называется *наклонной*, проведенной из точки A к прямой a. Точка C называется *основанием* наклонной, а отрезок BC — *проекцией* наклонной на прямую a.

Теорема 5.6. *Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую a, короче любой наклонной, проведенной из точки A к прямой a. Из двух наклонных короче та, у которой проекция меньше. И обратно, бо́льшая наклонная имеет большую проекцию.*

Доказательство. Сравним перпендикуляр AB с наклонной AC (рис. 43). У треугольника ABC угол B прямой. По теореме 5.2 углы A и C этого треугольника острые. Отсюда по теореме 5.3 заключаем, что $AB < AC$.

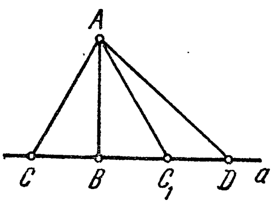

Рис. 44.

Сравним длины двух наклонных AC и AD. Пусть $BC < BD$. Будем различать два случая: 1) точка B не разделяет точки C и D (рис. 43); 2) точка B разделяет точки C и D (рис. 44). Рассмотрим первый случай. Так как $BC < BD$, то точка C лежит между B и D. Угол ACB является внешним углом треугольника ACD при вершине C. Так как этот угол острый, то угол C треугольника ACD тупой. Два других угла треугольника ACD острые. Отсюда по теореме 5.3 заключаем, что $AD > AC$.

Рассмотрим второй случай. Точка B разделяет точки C и D (рис. 44). Отложим на полупрямой CB отрезок CC_1, равный $2CB$. Точка B лежит между C и C_1. Треугольники ACB и AC_1B равны. Отсюда $AC = AC_1$. А по доказанному $AC_1 < AD$.

Третье утверждение теоремы о том, что бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию, доказывается от противного. Читателю предлагается провести это доказательство самостоятельно.

Треугольник, у которого один из углов прямой, называется *прямоугольным*. Два других угла прямоугольного треугольника острые. Стороны прямоугольного треугольника имеют специальные названия. Сторона, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*. Две другие стороны называются *катетами*. Для прямоугольных треугольников, кроме уже известных нам трех признаков равенства, можно указать другие признаки. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 5.7. *Два прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1 равны, если выполняется одно из следующих условий*:

1) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$;
2) $AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$;
3) $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1). Докажем равенство треугольников (рис. 45). Отложим на

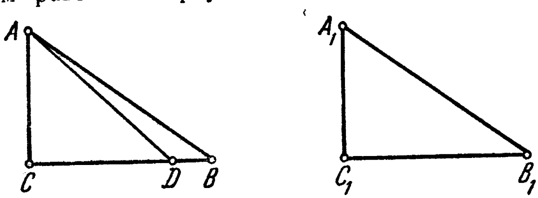

Рис. 45.

полупрямой CB отрезок CD равный C_1B_1. Треугольники ACD и $A_1C_1B_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. У них $AC = A_1C_1$ по условию, углы C и C_1 прямые, а $CD = C_1B_1$ по построению. Из равенства треугольников заключаем, что $AD = A_1B_1$. Но по условию $AB_1 = AB$. Поэтому $AD = AB$. Из теоремы 5.6 следует, что $CD = CB$, т. е. точка D совпадает с B. Следовательно, треугольник $A_1C_1B_1$ равен треугольнику ACB.

Пусть теперь выполняется условие 2). Докажем равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Снова отложим на полупрямой CB отрезок CD, равный C_1B_1. Утверждаем, что точка D совпадает с B. Допустим, это неверно. Тогда из трех точек C,B,D одна лежит между двумя другими. Этой точкой может быть либо B, либо D. Допустим, точка D лежит между C и B, как изображено на рис. 45. Так как треугольник ADC равен треугольнику $A_1B_1C_1$, то угол ADC равен углу ABC. Но угол ADC является внешним углом треугольника ADB и, следовательно, больше угла ABD. Мы пришли к противоречию. Итак, точка B совпадает с D. Поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC.

Пусть, наконец, выполняется условие 3). Докажем равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Отложим на полупрямой BC отрезок BD, равный B_1C_1 (рис. 46). Треугольники ABD и $A_1B_1C_1$ равны, так как $AB = A_1B_1$, $BD = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. Поэтому угол ADB прямой, т. е.

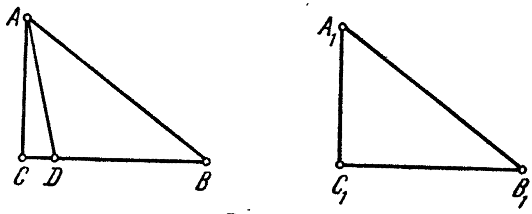

Рис. 46.

AD — перпендикуляр к CB. Но из точки A на прямую CB можно опустить только один перпендикуляр. Поэтому точка D совпадает с C и, следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC. Теорема доказана полностью.

Теорема 5.8. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 47, слева). Напомним, что *биссектрисой угла A* треугольника ABC называется полупрямая, проведенная из вершины A, проходящая между полупрямыми AB и AC, делящая угол A пополам. По теореме 2.7 эта полупрямая пересекает сторону BC в некоторой точке A_1, отрезок AA_1 называется *биссектрисой треугольника*, проведенной из вершины A.

Проведем биссектрису BB_1 треугольника из вершины B. Полупрямая BB_1 пересекает отрезок AA_1. Аналогично полупрямая AA_1 пересекает отрезок BB_1. Таким образом, прямые AA_1 и BB_1 пересекаются. Они могут иметь только одну точку пересечения. Эта точка принадлежит и отрезку

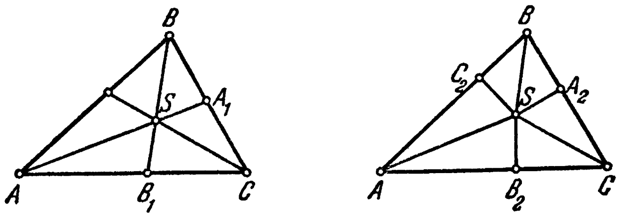

Рис. 47.

AA_1 и отрезку BB_1. Следовательно, биссектрисы треугольника, проведенные из вершин A и B, пересекаются в некоторой точке S.

Проведем полупрямую CS. Она пересекает отрезок AA_1 и поэтому проходит между полупрямыми CA и CB. Покажем, что полупрямая CS является биссектрисой угла C треугольника. Опустим из точки S перпендикуляры на прямые AB, BC и CA (рис. 47, справа). Прямоугольные треугольники ASB_2 и ASC_2 равны, так как у них сторона AS общая, а углы при вершине A равны. Отсюда следует, что $SB_2 = SC_2$.

Аналогично из равенства прямоугольных треугольников BSA_2 и BSC_2 заключаем о равенстве $SC_2 = SA_2$. Отсюда следует, что $SA_2 = SB_2$.

Прямоугольные треугольники CSA_2 и CSB_2 равны, так как у них гипотенуза SC общая, а катеты SA_2 и SB_2 равны по доказанному. Из равенства этих треугольников следует равенство углов SCA_2 и SCB_2. Следовательно, полупрямая SC является биссектрисой угла C треугольника. Теорема доказана.

Высотой треугольника ABC, опущенной из вершины A, называется перпендикуляр AD, опущенный из точки A на прямую BC (рис. 48).

Теорема 5.9. *Если углы B и C треугольника ABC оба острые, то основание D высоты, опущенной из вершины A, лежит на стороне BC, т. е. между точками*

B и C. Если угол B тупой, то вершина B лежит между точками C и D.

Доказательство. Пусть углы B и C острые. Если точка D не лежит между точками B и C, то либо C лежит между B и D, либо B лежит между C и D. Пусть для определенности точка C лежит между B и D. Тогда острый угол ACB является внешним углом треугольника ADC с прямым углом D. Но это невозможно, так как внешний угол больше внутреннего не смежного с ним. Аналогично доказывается, что точка B не может быть между C и D.

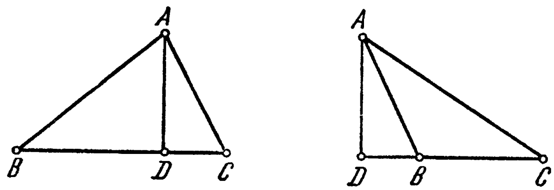

Рис. 48.

Пусть теперь угол B тупой. Покажем, что точка B лежит между C и D. Допустим, что точка B не лежит между C и D. Тогда C и D лежат по одну сторону от точки B. Поэтому внешний угол при вершине B треугольника ABC является внешним углом при вершине B треугольника ABD. Но это невозможно, так как угол D прямой, а внешний угол при вершине B острый.

Теорема доказана.

Упражнения

1. Из точки A, не лежащей на прямой a, проведены три наклонные: AB, AC и AD. Точка C лежит между B и D. Доказать, что наклонная AC меньше по крайней мере одной наклонной, AB или AD.

2. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ стороны $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A$ меньше $\angle A_1$. Доказать, что $BC < B_1C_1$.

3. Из вершины A треугольника ABC проведена биссектриса AD. Доказать, что если $AB > AC$, то $BD > DC$.

4. Доказать, что медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, меньше полусуммы сторон AB и AC.

5. Доказать, что биссектриса треугольника не больше медианы, проведенной из той же вершины.

§ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ*)

В задачах на построение речь идет о построении геометрической фигуры с помощью данных чертежных инструментов. Такими инструментами чаще всего являются линейка и циркуль. Решение задачи состоит не столько в построении фигуры, сколько в решении вопроса о том, как это сделать, и соответствующем доказательстве. Задача считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами.

С помощью линейки как инструмента геометрических построений можно провести произвольную прямую, произвольную прямую, проходящую через данную точку, прямую, проходящую через две данные точки. Никаких других операций выполнять линейкой нельзя. В частности, нельзя откладывать линейкой отрезки, даже если на ней имеются деления. Нельзя пользоваться обоими краями линейки и т. п.

Циркуль как инструмент геометрических построений позволяет описать из данного центра окружность данного радиуса. В частности, циркулем можно отложить данный отрезок на данной прямой из данной точки.

Рассмотрим простейшие задачи на построение.

З а д а ч а 6.1. *Построить треугольник с данными сторонами* a, b, c (рис. 49, слева).

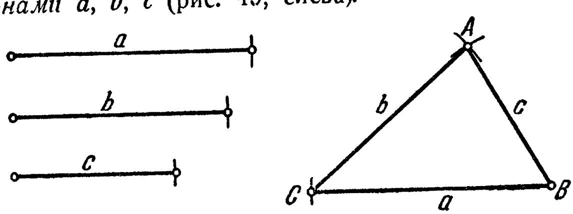

Рис. 49.

Р е ш е н и е. Линейкой проведем произвольную прямую и отметим на ней произвольную точку B (рис. 49, справа). Раствором циркуля, равным a, описываем окружность с

---

*) З а м е ч а н и е д л я у ч и т е л е й. По методическим соображениям мы переходим к вопросу о геометрических построениях. Так как этот вопрос недостаточно подготовлен предыдущим изложением, то наши рассмотрения в этом параграфе будут в ряде случаев неполными и не вполне строгими.

центром B и радиусом a. Пусть C — точка ее пересечения с прямой. Теперь раствором циркуля, равным c, описываем окружность из центра B, а раствором циркуля, равным b, описываем окружность из центра C. Пусть A — точка пересечения этих окружностей. Треугольник ABC имеет стороны, равные a, b, c.

Задача 6.1 не всегда имеет решение. Согласно теореме 5.4 отрезки a, b, c должны удовлетворять условиям:

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b.$$

Задача 6.2. *Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.*

Решение. Проведем произвольную окружность с центром в вершине A данного угла (рис. 50, слева). Пусть B и C — точки пересечения окружности со сторонами угла.

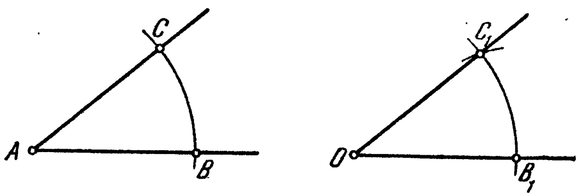

Рис. 50.

Радиусом AB проведем окружность с центром в точке O — начальной точке данной полупрямой. Точку пересечения этой окружности с данной полупрямой обозначим B_1 (рис. 50, справа). Опишем окружность с центром B_1 и радиусом BC. Точка C_1 пересечения описанных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла. Для доказательства достаточно заметить, что треугольники ABC и OB_1C_1 равны, как треугольники с соответственно равными сторонами. Углы A и O являются соответствующими углами этих треугольников.

Задача 6.3. *Разделить данный угол пополам.*

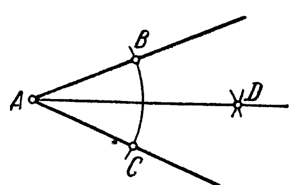

Рис. 51.

Решение. Из вершины A данного угла, как из центра, описываем окружность произвольного радиуса (рис. 51). Пусть B и C — точки ее пересечения со сторонами угла. Из точек B и C тем же радиусом описываем окружности.

Пусть D их точка пересечения, отличная от A. Полупрямая AD делит угол A пополам. Это следует из равенства треугольников ABD и ACD, у которых углы DAB и DAC являются соответствующими.

Задача 6.4. *Разделить данный отрезок пополам.*

Решение. Пусть AB — данный отрезок (рис. 52). Из точек A и B радиусом AB описываем окружности. Пусть C и C_1 — точки пересечения этих окружнcстей. Они лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Отрезок CC_1 пересекает прямую AB в некоторой точке O. Эта точка и есть средина отрезка AB.

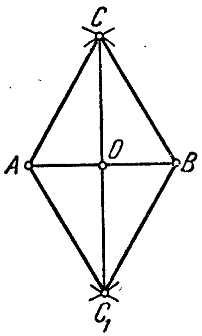

Рис. 52.

Действительно, треугольники CAC_1 и CBC_1 равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда следует равенство углов ACO и BCO. Теперь треугольники ACO и BCO равны по первому признаку. Стороны AO и BO этих треугольников являются соответствующими, а поэтому равны. Таким образом, O — средина отрезка AB.

Задача 6.5. *Из данной точки O провести перпендикуляр к данной прямой a.*

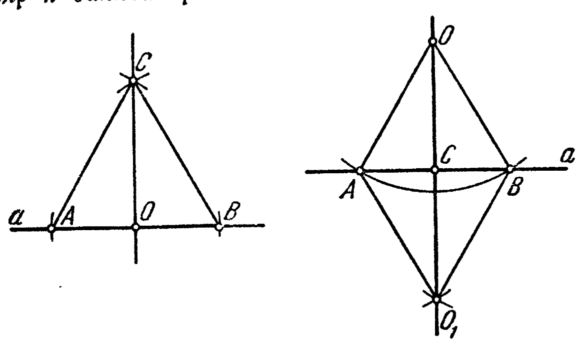

Рис. 53.

Решение. Возможны два случая: 1) точка O лежит на прямой a; 2) точка O не лежит на прямой a.

Рассмотрим первый случай (рис. 53, слева).

Из точки O проводим произвольным радиусом окружность. Она пересекает прямую в двух точках A и B. Из точек A и B проводим окружности радиусом AB. Пусть C — их точка пересечения. Искомая прямая проходит через точки O и C. Перпендикулярность прямых OC и AB следует из равенства углов при вершине O треугольников ACO и BCO. Эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

Рассмотрим второй случай (рис. 53, справа). Из точки O произвольным радиусом проводим окружность, пересекающую прямую a. Пусть A и B — точки ее пересечения с прямой a. Из точек A и B тем же радиусом проводим окружности. Пусть O_1 — их точка пересечения, отличная от O. Искомая прямая проходит через точки O и O_1. Читателю предлагается обосновать это построение.

Одним из методов решения задач на построение является метод геометрических мест. *Геометрическим местом точек* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством. Например, по определению, *окружность* есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется *центром* окружности, а расстояние точек окружности от центра называется *радиусом* окружности. Важное геометрическое место точек дает следующая теорема.

Теорема 6.6. *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек A и B, есть прямая, перпендикулярная отрезку AB, проходящая через его средину O* (рис. 54).

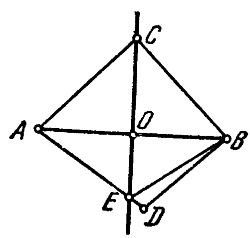

Рис. 54.

Доказательство. То, что каждая точка C указанной прямой находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, следует из равенства треугольников AOC и BOC. У этих треугольников углы при вершине O прямые, сторона OC общая, а $AO = OB$, так как O — средина отрезка AB. Покажем теперь, что каждая точка D плоскости, равноудаленная от точек A и B, лежит на прямой OC.

Допустим, что точка D не лежит на прямой OC. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой OC. Пусть для определенности точка D находится в одной полуплоскости с точкой B, как это изображено на рис. 54. Тогда отрезок AD пересекается с прямой OC

в некоторой точке E. По доказанному $AE = BE$. По предположению $AD = BD$. Отсюда следует, что в треугольнике BDE $DB = BE + ED$. А это невозможно, так как сумма двух сторон больше третьей.

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Теорема 6.7. *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, состоит из биссектрис углов, которые получаются в пересечении этих прямых.*

Доказательство (рис. 55). Пусть a — биссектриса одного из углов и A — произвольная точка на ней. Опустим из точки A перпендикуляры на стороны угла. Пусть B и C — основания этих перпендикуляров. Из равенства прямоугольных треугольников AOB и AOC (теорема 5.7) заключаем, что $AB = AC$, т. е. точка A равноудалена от данных прямых.

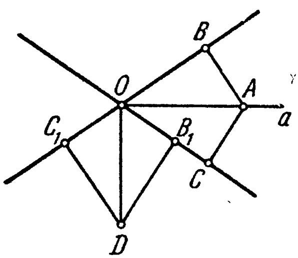

Рис. 55.

Пусть теперь D — произвольная точка плоскости, равноудаленная от данных прямых. Покажем, что она лежит на биссектрисе одного из углов. Опустим из точки D перпендикуляры на данные прямые. Пусть B_1 и C_1 — основания перпендикуляров. По теореме 5.7 треугольники DOB_1 и DOC_1 равны. Отсюда следует равенство углов DOC_1 и DOB_1. А это значит, что точка D лежит на биссектрисе угла C_1OB_1.

Сущность метода геометрических мест решения задач на построение состоит в следующем. Пусть, решая задачу на построение, нам надо построить некоторую точку X, удовлетворяющую двум условиям: некоторому условию 1) и некоторому условию 2). Геометрическое место точек, удовлетворяющих условию 1), есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих условию 2), есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, т. е. является их точкой пересечения. Если наши геометрические места простые, состоят из прямых и окружностей, то мы можем их построить и, таким образом, найти интересующую нас точку X. Приведем пример.

Окружностью, *описанной* около треугольника, называется окружность, которая проходит через каждую из вершин треугольника.

Задача 6.8. *Найти окружность, описанную около данного треугольника ABC.*

Решение (рис. 56). Центр O искомой окружности находится на одинаковом расстоянии от всех трех вершин A, B, C. Вместо этого можно сказать, что центр O удовлетворяет двум условиям: 1) центр окружности находится на одинаковом расстоянии от вершин A и C; 2) центр окружности находится на одинаковом расстоянии от вершин B и C. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть перпендикуляр к стороне AC, проведенный через ее средину. Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть перпендикуляр к отрезку BC, проведенный через его средину. Таким образом, центр O описанной окружности лежит на пересечении этих перпендикуляров.

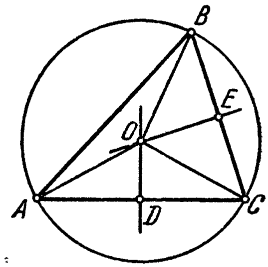

Рис. 56.

Из этого решения получается важное следствие. Так как центр O описанной окружности находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, то по теореме 6.6 он лежит на перпендикуляре к отрезку AB, проведенном через его средину. Отсюда следует, что *три прямые, проходящие через средины сторон треугольника, перпендикулярно этим сторонам, пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.*

Применение метода геометрических мест не всегда так просто, как в задаче 6.8. Рассмотрим более сложный пример.

Задача 6.9. *Даны прямая a, точка A на ней и точка B, не лежащая на прямой a* (рис. 57). *Требуется найти на прямой a такую точку X, чтобы $AX+XB$ было равно данному отрезку m.*

Решение. Условия, которым подчинена точка X, можно представить в виде двух условий: 1) точка X лежит на прямой a; 2) $AX+XB=m$. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть сама прямая a. Однако геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, довольно сложно. Оно не сводится к прямым и окружностям. Недостаточно представить условия, определяющие положение точки X, в виде двух условий. Надо еще, чтобы каждое из них определяло простое геометрическое место, состоящее из прямых или окружностей. Умение найти эти условия и является главным в решении задачи.

Покажем, как найти эти условия в данной задаче. Допустим, что задача решена. Отложим на полупрямой AX отрезок AC, равный m. Тогда $XC = XB$, т. е. точка X равноудалена от точек B и C. Теперь мы можем формулировать два условия, определяющих положение точки X: 1) точка X лежит на отрезке AC; 2) точка X равноудалена

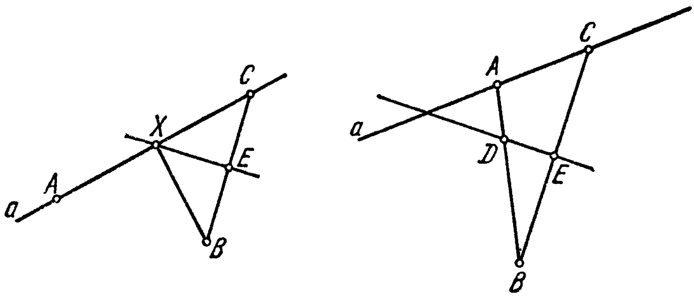

Рис. 57.

от точек B и C. Первое геометрическое место есть отрезок AC, второе геометрическое место есть прямая, перпендикулярная отрезку BC, проходящая через его средину. Точка X находится на пересечении этих геометрических мест.

Решение задачи на построение предполагает обычно исследование вопроса о разрешимости задачи и определении числа решений. Приведем такое исследование для задачи 6.9.

В расположении точки B относительно точки A могут быть три случая: 1) $AB > m$, 2) $AB = m$ 3) $AB < m$. Покажем, что в первом случае задача не имеет решения, во втором случае задача имеет единственное решение, в третьем случае задача имеет ровно два решения.

Рассмотрим первый случай. Допустим, некоторая точка X, отличная от A, дает решение задачи. Тогда $AX + XB = m$. С другой стороны, по свойству сторон треугольника AXB $AX + XB > AB > m$. Мы пришли к противоречию.

Если же точка X совпадает с A (в этом случае предполагается $AX=0$), будем иметь $AX+XB=AB>m$, т. е. снова противоречие. Итак, в первом случае, при $AB>m$, задача не имеет решения.

Во втором случае, при $AB=m$, единственная точка X, дающая решение задачи, есть точка A. Для любой другой точки $AX+XB>AB=m$.

Рассмотрим, наконец, третий случай ($AB<m$). Покажем сначала, что задача не может иметь больше двух решений. Пусть точка X прямой a дает решение задачи. Как показано выше, точка X есть пересечение отрезка AC с перпендикуляром к отрезку BC в его средине (рис. 57, слева). Так как отрезок AC, равный m, можно отложить только двумя способами из точки A на прямой a, то задача может иметь не более двух решений.

Докажем теперь, что два решения действительно существуют. Для этого достаточно доказать, что перпендикуляр к отрезку BC в его средине всегда пересекает отрезок AC, в какую бы сторону ни откладывать отрезок $AC=m$ из точки A на прямой a.

Допустим, перпендикуляр не пересекает отрезок AC (рис. 57, справа). Тогда по теореме 2.1 он пересекает сторону AB треугольника ABC в некоторой точке D. Так как $BD=CD$, то $AB=AD+CD>AC$. Но в рассматриваемом случае $AB<AC$. Мы пришли к противоречию. Итак, перпендикуляр к отрезку BC в его средине пересекает отрезок AC. Точка пересечения X дает решение задачи. Двум способам откладывать отрезок $AC=m$ из точки A на прямой a соответствуют два решения. Эти решения, очевидно, различны.

Упражнения

1. Разделить угол на 4 и 8 равных частей.
2. Построить точку X, которая равноудалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.
3. Построить треугольник ABC, если заданы сторона AB, угол A и сумма двух других сторон $AC+BC=m$.
4. Построить треугольник ABC, если заданы сторона AB, угол A и разность двух других сторон $AC-BC=n$.
5. Даны прямая a и две точки B и C, не лежащие на этой прямой. Найти на прямой a точку X такую, чтобы сумма расстояний $BX+XC$ была наименьшей. Рассмотреть два случая расположения точек B и C относительно прямой a: 1) точки B и C лежат по разные стороны от прямой a; 2) точки B и C лежат по одну сторону от прямой a.

§ 7. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Теорема 7.1. *Если прямые a и b параллельны, то каждая из них лежит в одной из полуплоскостей, определяемых другой прямой.*

Доказательство (рис. 58). Пусть B — какая-нибудь точка на прямой b. Она лежит в одной из полуплоскостей, на которые прямая a разбивает плоскость. Допустим, некоторая точка C прямой b лежит в другой полуплоскости. Тогда отрезок BC пересекается с прямой a. Но тогда прямая b пересекается с прямой a. А это противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

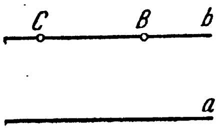

Рис. 58.

Теорема 7.2. *Если прямая a пересекает прямую b, то она пересекает любую прямую c, параллельную b.*

Доказательство. Если прямая a не пересекает прямую c, то через точку пересечения прямых a и b проходят две прямые, параллельные c: прямая a и прямая b. Но это невозможно по аксиоме параллельных V. Теорема доказана.

Теорема 7.3. *Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямые a и c параллельны.*

Доказательство. Если прямые a и c не параллельны, т. е. пересекаются, то через точку их пересечения проходят две прямые, параллельные b, — прямая a и прямая c. Но это противоречит аксиоме параллельных V. Теорема доказана.

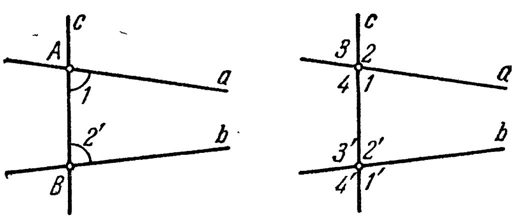

Рис. 59.

Пусть a и b — различные прямые (рис. 59). Пусть прямая c пересекает прямые a и b в различных точках A и B. Прямая c разбивает плоскость на две полуплоскости. Обозначим их γ и γ_1. Пусть для определенности полуплоскость γ будет правой полуплоскостью на рис. 59. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости: α и α_1. Пусть α — та полуплоскость, в которой лежит точка B. Прямая b разбивает плоскость на две полуплоскости: β и β_1. Пусть β — та полуплоскость, в которой лежит точка A.

Прямые a и c, пересекаясь в точке A, разбиваются этой точкой на две полупрямые. Взяв по одной полупрямой на каждой из прямых a и c, мы получим угол. Этот угол вполне определяется указанием двух полуплоскостей: полуплоскости, определяемой прямой a, в которой лежит полупрямая прямой c, и полуплоскости, определяемой прямой c, в которой лежит полупрямая прямой a. Например, угол, отмеченный цифрой *1*, задается полуплоскостями α и γ. В связи с этим углы при точке A можно обозначать парой полуплоскостей. Например, угол *1* обозначается (α, γ).

Углы, образуемые в пересечении прямых a и b с прямой c, имеют специальные названия. Углы (γ, α) и (γ, β), отмеченные цифрами *1* и *2'* на рис. 59, называются *внутренними односторонними*. Углы (γ', α) и (γ', β), отмеченные цифрами 4 и 3', также внутренние односторонние. Углы (γ, α') и (γ, β), т. е. *2* и *2'*, называются *соответствующими*. Соответствующие также углы *1* и *1'*, *4* и *4'*, *3* и *3'*. Углы *1* и *3'*, *4* и *2'* называются *внутренними накрестлежащими*. Углы *2* и *4'*, *3* и *1'* называются *внешними накрестлежащими*.

Теорема 7.4. *Если две прямые a и b в пересечении с третьей прямой c образуют внутренние односторонние углы, сумма которых равна двум прямым, то прямые a и b не пересекаются, т. е. параллельны.*

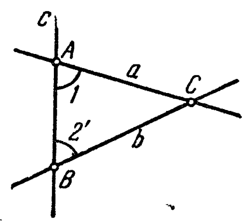

Рис. 60.

Доказательство. Сохраним введенные выше обозначения для полуплоскостей, определяемых прямыми a, b, c. Допустим, прямые a и b пересекаются. Точка их пересечения C (рис. 60) принадлежит одной из полуплоскостей γ или γ_1. Пусть для определенности точка C принадлежит правой полуплоскости, т. е. γ. Внутренние односторонние углы (γ, α) и (γ, β), отмеченные на рисунке цифрами *1* и *2'*, являются углами треугольника ABC при вершинах A и B. Таким образом, сумма углов A и B

треугольника ABC равна двум прямым. Отсюда по свойству смежных углов заключаем, что внешний угол треугольника при вершине A равен углу B треугольника. Но это противоречит теореме 5.1, согласно которой внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним. Теорема доказана.

Из свойств смежных и вертикальных углов следует, что если два соответствующих угла равны или два накрестлежащих угла равны, то сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым (рис. 59). Поэтому верна следующая теорема.

Теорема 7.5. *Пусть даны две прямые a и b, которые пересекаются прямой c. Тогда прямые a и b параллельны, если выполняется одно из следующих условий:*

1) *два соответствующих угла равны;*

2) *два накрестлежащих угла равны.*

Теорема 7.6. *Если две параллельные прямые a и b пересекаются прямой c, то сумма двух внутренних односторонних углов равна двум прямым, сумма двух внешних односторонних углов равна двум прямым, любые два соответствующих угла равны, любые два накрестлежащих угла равны.*

Доказательство. Пусть A и B — точки пересечения прямой c с прямыми a и b (рис. 61). Докажем, что сумма двух внутренних односторонних углов равна двум прямым.

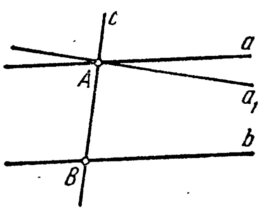

Рис. 61.

Допустим, что она не равна двум прямым. Тогда существует отличная от a прямая a_1, проходящая через точку A, такая, что прямые a_1 и b в пересечении с c образуют внутренние односторонние углы, сумма которых равна двум прямым. По теореме 7.4 прямая a_1 параллельна прямой b. Таким образом, через точку A проходят две прямые a и a_1, параллельные b. Но это противоречит аксиоме параллельных. Первое утверждение теоремы доказано.

Остальные утверждения теоремы вытекают из доказанного свойства внутренних односторонних углов при параллельных и свойств смежных и вертикальных углов.

Теорема 7.7. *Если прямая c пересекает прямую a под прямым углом, то она пересекает любую прямую b, параллельную a, под прямым углом.*

Доказательство. То, что прямая c пересекает прямую b, следует из теоремы 7.2. То, что прямая c пересекает прямую b под прямым углом, следует из теоремы 7.6. Теорема доказана.

Теорема 7.8. *Параллельные прямые — равноотстоящие. Это значит, что перпендикуляры, опущенные из любых двух точек одной прямой на другую прямую, равны.*

Доказательство. Пусть a и b — данные параллельные прямые (рис. 62). Пусть A и B — две произвольные точки на прямой a. Опустим из них перпендикуляры на прямую b. Пусть A_1 и B_1 — основания этих перпендикуляров. По теореме 7.5 прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

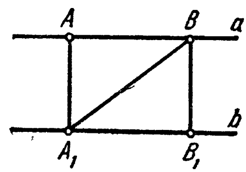

Рис. 62.

Треугольники ABA_1 и B_1A_1B равны. У них сторона A_1B общая. Углы ABA_1 и B_1A_1B равны, как внутренние накрестлежащие при параллельных a и b. Углы B_1BA_1 и AA_1B равны, как внутренние накрестлежащие при параллельных AA_1 и BB_1. Из равенства треугольников заключаем, что $AA_1 = BB_1$. Теорема доказана.

Теорема 7.9. *Геометрическое место точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой a и равноудаленных от этой прямой, есть прямая, параллельная a.*

Доказательство. Пусть B — точка геометрического места и b — прямая, параллельная прямой a, проходящая через точку B. По теореме 7.8 прямая b принадлежит геометрическому месту. Покажем, что каждая точка геометрического места принадлежит прямой b.

Пусть X — произвольная точка искомого геометрического места. Проведем через точку X прямую, перпендикулярную прямой a. Она пересекает прямую a в некоторой точке A, а прямую b в некоторой точке B_1. Точка X лежит на полупрямой AB_1. Так как отрезки AB_1 и AX равны, то точка X совпадает с B_1. Таким образом, геометрическое место состоит из точек прямой b и только этих точек. Теорема доказана.

Теорема 7.10. *Сумма углов треугольника равна двум прямым.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 63). Проведем через вершину C треугольника прямую a, параллельную прямой AB. Отметим на прямой a две точки A_1 и B_1, расположенные в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Пусть для определенности точка B_1 будет в той же полуплоскости, в которой лежит точка B. Точки A_1 и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Поэтому отрезок A_1B пересекается с прямой AC. Точка пересечения принадлежит полупрямой CA, так как эта полупрямая и отрезок A_1B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Отсюда следует, что полупрямая CA проходит между CA_1 и CB. Поэтому угол A_1CB равен сумме углов A_1CA и ACB.

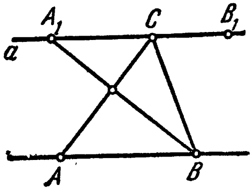

Рис. 63.

По свойству накрестлежащих углов при параллельных угол A_1CA равен углу BAC, угол B_1CB равен углу ABC. Поэтому сумма углов треугольника ABC равна сумме смежных углов A_1CB и B_1CB, т. е. двум прямым. Теорема доказана.

Теорема 7.11. *У прямоугольного треугольника острые углы дополняют друг друга до прямого, т. е. сумма острых углов равна прямому.*

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 7.10.

Теорема 7.12. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник. Внешний угол при вершине A является смежным углу A треугольника и поэтому дополняет угол A до двух прямых. Так как сумма всех трех углов треугольника равна двум прямым, то внешний угол при вершине A равен сумме углов B и C треугольника. Теорема доказана.

Мы будем говорить, что два угла имеют параллельные стороны, если прямые, на которых лежат эти стороны, параллельны.

Теорема 7.13. *Углы с параллельными сторонами либо равны, либо дополняют друг друга до двух прямых.*

Доказательство. Пусть стороны a_1 и b_1 первого угла лежат на прямых a и b, а стороны c_1 и d_1 второго угла лежат на прямых c и d. Пусть для определенности прямая a параллельна c, а прямая b параллельна d (рис. 64).

Прямая c пересекает прямую b в некоторой точке C. По свойству углов, образуемых параллельными прямыми b и d в пересечении с прямой c, углы, образуемые прямыми b и c в точке C, и углы, образуемые прямыми c

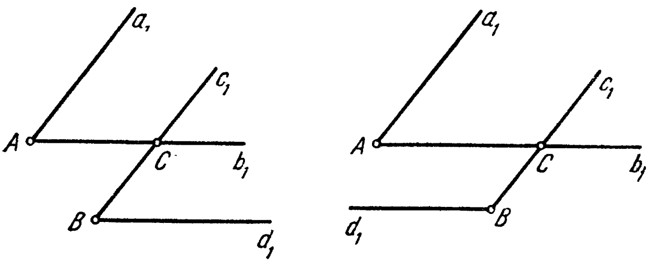

Рис. 64.

и d в точке B, либо равны, либо дополняют друг друга до двух прямых. То же относится к углам, которые образуют прямые a и b в точке A, и углам, которые образуют прямые b и c в точке C. Отсюда заключаем, что углы (a_1, b_1) и (c_1, d_1) либо равны, либо дополняют друг друга до двух прямых. Теорема доказана.

Теорема 7.14. *Углы с перпендикулярными сторонами либо равны, либо их сумма равна двум прямым.*

Доказательство. Пусть a и b — прямые, содержащие стороны первого угла, а c и d — прямые, содержащие стороны второго угла. Пусть для определенности прямая a перпендикулярна c, а прямая b перпендикулярна d. Будем различать два случая: 1) прямые a и b перпендикулярны; 2) прямые a и b не перпендикулярны.

Рассмотрим первый случай. Так как прямая a перпендикулярна b и перпендикулярна c, то прямые b и c либо параллельны, либо совпадают. Аналогично прямые a и d, будучи перпендикулярны прямой b, либо параллельны, либо совпадают. Отсюда по теореме 7.12 заключаем, что прямые c и d перпендикулярны.

Рассмотрим второй случай. Пусть прямые a и b не перпендикулярны. Пусть O — их точка пересечения (рис. 65). Возьмем на прямой a точку A и опустим из нее перпендикуляр AB на прямую b. Опустим из точки B перпендикуляр BC на прямую a. По теореме 5.9 точка C лежит между O и A. Углы AOB и ABC равны, так как оба они дополняют угол OAB до прямого. Стороны угла ABC параллельны прямым c и d. Отсюда по теореме 7.13 заключаем, что углы между прямыми a и b, c и d либо равны, либо дополняют друг друга до двух прямых. Теорема доказана.

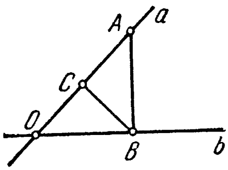

Рис. 65.

Задача 7.15. *Провести через точку B прямую, параллельную данной прямой a.*

Решение. Проводим через точку B прямую b, перпендикулярную прямой a (задача 6.5). Проводим через точку B прямую c, перпендикулярную прямой b. По теореме 7.4 прямая c параллельна прямой a.

Упражнения

1. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и боковыми сторонами AC и BC. Доказать, что сумма расстояний произвольной точки X, взятой на основании AB, от прямых AC и BC постоянна, т. е. не зависит от точки X.
2. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух пересекающихся прямых постоянна.
3. Найти геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от заданной прямой.
4. Найти геометрическое место средин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.
5. Найти геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных параллельных прямых.
6. Доказать, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.
7. Доказать, что если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 30°, то противолежащий ему катет равен половине гипотенузы.
8. Найти геометрическое место средин отрезков данной длины с концами на двух перпендикулярных прямых.

§ 8. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ. ТРАПЕЦИЯ

Четырехугольником $ABCD$ называется фигура, которая состоит из четырех точек A, B, C, D по три, не лежащих на одной прямой, и четырех отрезков AB, BC, CD и AD, соединяющих эти точки (рис. 66). Точки A, B, C,

D называются *вершинами* четырехугольника, а отрезки AB, BC, CD, DA называются его *сторонами*. Вершины A и C, B и D называются *противолежащими* вершинами. Стороны AB и CD, BC и AD называются *противолежащими* сторонами. Четырехугольник называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно

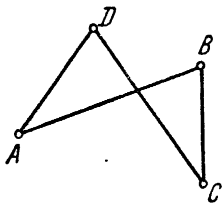

Рис. 66.

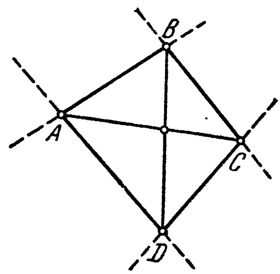

Рис. 67.

прямой, содержащей любую его сторону (рис. 67). Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются *диагоналями*.

Теорема 8.1. *Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник (рис. 67). Полупрямые DA и DB лежат в одной полуплоскости относительно прямой DC. По теореме 2.5 либо полупрямая DA проходит между полупрямыми DB и DC, либо полупрямая DB проходит между полупрямыми DA и DC. Первая возможность исключается, так как полупрямая DA не пересекает отрезок BC. Таким образом, полупрямая DB проходит между полупрямыми DA и DC. Отсюда следует, что отрезок AC пересекается с прямой DB. Аналогично доказывается, что отрезок BD пересекается с прямой AC. Так как прямые AC и BD могут иметь только одну точку пересечения, то она принадлежит отрезкам AC и BD, т. е. диагоналям четырехугольника. Теорема доказана.

Углом A выпуклого четырехугольника $ABCD$ называется угол между полупрямыми AB и AD. Угол B — это угол между полупрямыми BA и BC и т. д.

Теорема 8.2. *Сумма углов выпуклого четырехугольника равна четырем прямым.*

Доказательство (рис. 68). Полупрямая DB проходит между полупрямыми DA и DC, так как пересекает отрезок AC (теорема 8.1). Поэтому угол D четырехугольника равен сумме углов ADB и CDB. Аналогично угол B четырехугольника равен сумме углов ABD и CDB. Отсюда следует, что сумма углов четырехугольника равна сумме углов двух треугольников ABD и CDB, т. е. четырем прямым. Теорема доказана.

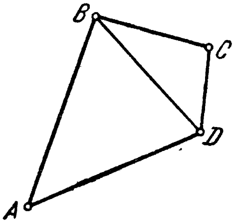

Рис. 68.

Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.

Теорема 8.3. *Параллелограмм есть выпуклый четырехугольник.*

Доказательство (рис. 69). Возьмем какую-нибудь сторону параллелограмма, например AD. По теореме 7.1 прямая BC лежит в одной полуплоскости относительно прямой AD. По теореме 2.4 отрезки AB и CD лежат в той же полуплоскости. Таким образом, весь параллелограмм лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей сторону AD. Взяв другую сторону параллелограмма, приходим к такому же выводу. Теорема доказана.

Теорема 8.4. *У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.*

Доказательство (рис. 69). Проведем диагональ BD. Треугольники BDC и DBA равны. У них сторона BD общая. Углы CBD и ADB равны, как внутренние накрестлежащие при параллельных прямых BC и AD. Углы CDB и ABD равны, как внутренние накрестлежащие при параллельных AB и CD. Из равенства треугольников заключаем, что $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C$. Равенство других противолежащих углов доказывается проведением другой диагонали. Теорема доказана.

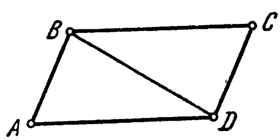

Рис. 69.

Теорема 8.5. *Если у выпуклого четырехугольника две противолежащие стороны параллельны и равны, то четырехугольник есть параллелограмм.*

Если у выпуклого четырехугольника противолежащие стороны равны, то он есть параллелограмм.

Доказательство. Проведем диагональ BD четырехугольника $ABCD$ (рис. 69). Оба утверждения теоремы следуют из равенства треугольников ABD и CDB. В первом случае эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Во втором случае — по третьему признаку равенства треугольников.

Теорема 8.6. *Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.*

Доказательство (рис. 70). По теореме 8.1 диагонали параллелограмма пересекаются в некоторой точке O. Треугольники AOB и COD равны. У этих треугольников $AB = CD$, как противолежащие стороны параллелограмма. Углы ABO и CDO, BAO и DCO равны, как внутренние накрестлежащие при параллельных AB и CD. Из равенства треугольников следует, что $AO = OC$, $BO = OD$. Теорема доказана.

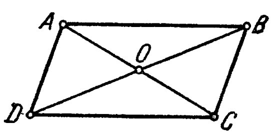

Рис. 70.

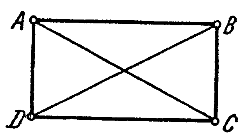

Рис. 71.

Прямоугольник — это четырехугольник, у которого все углы прямые (рис. 71).

Теорема 8.7. *Прямоугольник есть параллелограмм. Диагонали прямоугольника равны.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник (рис. 71). Прямые AD и BC, будучи перпендикулярны AB, являются параллельными (теорема 7.4). Аналогично заключаем о параллельности сторон AB и DC. Следовательно, прямоугольник есть параллелограмм.

Второе утверждение теоремы следует из равенства прямоугольных треугольников DAB и CBA. У них углы A и B прямые, катет AB общий, а катеты DA и CB равны, как противолежащие стороны параллелограмма. Из равенства треугольников следует, что $AC = BD$. Теорема доказана.

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 72).

Теорема 8.8. *Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный ромб (рис. 72). Треугольники AOB и COB равны, так как $AB = BC$ по определению ромба, $AO = OC$ по теореме 8.6, сторона OB общая. Так как углы AOB и COB смежные, то они, будучи равны, прямые.

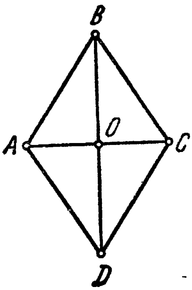

Рис. 72.

Из равенства треугольников AOB и COB следует также, что углы ABO и CBO равны, т. е. диагональ BD является биссектрисой угла B ромба. Теорема доказана.

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны. Квадрат является ромбом, поэтому обладает свойствами прямоугольника и ромба.

Теорема 8.9. *Пусть три параллельные прямые a, b, c пересекаются прямыми d и d_1 в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно* (рис. 73).

Тогда, если точка B лежит между A и C, то точка B_1 лежит между A_1 и C_1. Если $AB = BC$, то $A_1B_1 = B_1C_1$.

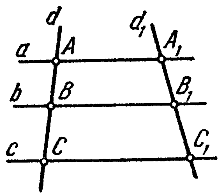

Рис. 73.

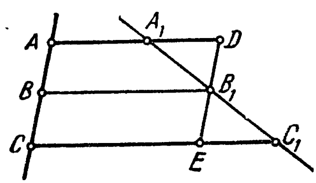

Рис. 74.

Доказательство. По теореме 7.1 прямая b лежит в одной из полуплоскостей относительно прямой a. Обозначим эту полуплоскость α. Ту полуплоскость, определяемую прямой c, в которой лежит прямая b, обозначим через γ. Таким образом, прямая b лежит в каждой из полуплоскостей α и γ. Часть прямой d_1, которая лежит в полуплоскостях α и γ, состоит из точек отрезка A_1C_1 и только этих точек. Поэтому точка B_1, в которой пересекаются прямые b и d_1, принадлежит отрезку A_1C_1. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение (рис. 74). Проведем через точку B_1 прямую ED, параллельную прямой d. Треугольники B_1A_1D и B_1C_1E равны. У них $B_1D = B_1E$, так как $B_1D = AB$, а $B_1E = BC$. Углы A_1DB_1 и C_1EB_1 равны, как внутренние накрестлежащие при параллельных AD и CE. Углы A_1B_1D и C_1B_1E равны, как вертикальные. Из равенства треугольников следует, что $A_1B_1 = B_1C_1$. Теорема доказана полностью.

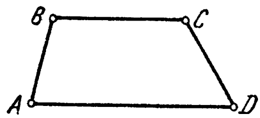

Рис. 75.

Трапецией называется выпуклый четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны. Эти стороны называются *основаниями* трапеции. Две другие стороны называются *боковыми сторонами* (рис. 75). Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой*. Отрезок, соединяющий средины боковых сторон, называется *средней линией* трапеции.

Теорема 8.10. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме оснований.*

Доказательство. Пусть ABB_1A_1 — данная трапеция, AA_1 и BB_1 ее основания и CC_1 — средняя линия (рис. 76). Проведем через точку C прямую, параллельную основаниям. По теореме 8.9 она пересекает отрезок A_1B_1 посредине. Следовательно, средняя линия трапеции параллельна основаниям.

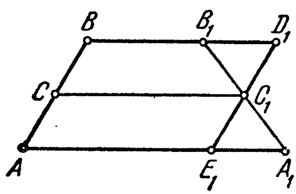

Рис. 76.

Проведем через точку C_1 прямую E_1D_1, параллельную стороне AB. Точки A и B лежат по одну сторону прямой E_1D_1. Точки B_1 и A_1 лежат по разные стороны этой прямой. Пусть для определенности точка B_1 лежит с той же стороны, что и точки A, B. Точки B_1 и D_1 лежат по одну сторону от AB. Поэтому B не лежит между B_1 и D_1. Следовательно, B_1 лежит между B и D_1.

Из равенства треугольников $C_1B_1D_1$ и $C_1A_1E_1$ следует, что $B_1D_1 = E_1A_1$. По свойству параллелограмма $CC_1 = BD_1 = BB_1 + B_1D_1, CC_1 = AE_1 = AA_1 - A_1E_1$. Складывая эти равенства почленно, получим $2CC_1 = AA_1 + BB_1$. Теорема доказана.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий средины двух сторон.

Теорема 8.11. *Средняя линия A_1B_1 треугольника ABC* (рис. 77) *параллельна стороне AB и равна половине этой стороны.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы и предлагается читателю в качестве упражнения.

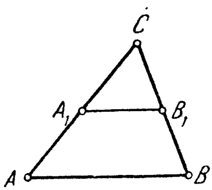

Рис. 77.

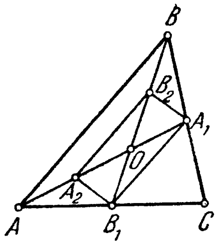

Рис. 78.

Теорема 8.12. *Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка делит каждую медиану в отношении* 2 : 1, *считая от вершины.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, AA_1 и BB_1 — две его медианы (рис. 78). Полупрямая AA_1 пересекает отрезок BC, поэтому пересекает медиану BB_1. Аналогично заключаем, что полупрямая BB_1 пересекает отрезок AA_1. Прямые BB_1 и AA_1 могут иметь только одну точку пересечения. Она принадлежит каждой из медиан, т. е. медианы пересекаются. Пусть O — точка пересечения медиан AA_1 и BB_1.

Проведем среднюю линию A_1B_1 треугольника ABC и среднюю линию A_2B_2 треугольника AOB. Обе они параллельны стороне AB и равны половине этой стороны. Отсюда следует, что четырехугольник $A_1B_1A_2B_2$ есть параллелограмм. По свойству параллелограмма $B_1O = OB_2$, а $OB_2 = B_2B$ по построению. Таким образом, медиана AA_1 делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1. Медиана, проведенная из точки C, делит медиану BB_1 в том же отношении. Поэтому и она проходит через точку O. Теорема доказана.

Теорема 8.13. *Три прямые, перпендикулярные сторонам треугольника, проходящие через средины сторон, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник и a, b, c — прямые, перпендикулярные его сторонам, проходящие через средины сторон (рис. 79). Прежде всего покажем, что прямые a и b пересекаются. Действительно, если они не пересекаются, т. е. параллельны, то прямые AC и BC, будучи им перпендикулярны, тоже параллельны. Но прямые AC и BC пересекаются в точке C. Итак, прямые a и b пересекаются в некоторой точке O. По теореме 6.6 точка O одинаково удалена от точек A и C и от точек B и C. Следовательно, она одинаково удалена от точек A и B. По теореме 6.6 она принадлежит прямой c. Теорема доказана.

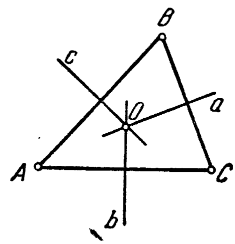

Рис. 79.

Теорема 8.14. *Три прямые, проведенные через вершины треугольника перпендикулярно его сторонам, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник и a, b, c — прямые, проходящие через его вершины перпендикулярно противоположным сторонам (рис. 80). Проведем через вершины треугольника прямые, параллельные противоположным сторонам. Они пересекаются в точках A_1, B_1, C_1. По свойству параллелограмма $AC = BA_1$, $AC = C_1B$. Отсюда $C_1B = BA_1$. Аналогично заключаем, что $C_1A = AB_1$, $B_1C = CA_1$. Из теоремы 8.13 следует, что прямые a, b, c, проходящие через средины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярно этим сторонам, пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

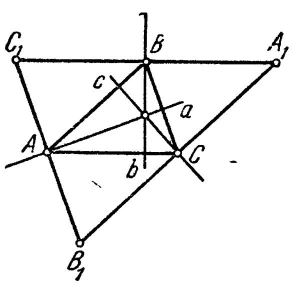

Рис. 80.

Задача 8.15. *Разделить данный отрезок AB на n равных частей.*

Решение. Проведем из точки A произвольную полупрямую a, не лежащую на прямой AB. Отложим на полупрямой a равные отрезки AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$. Проведем через точки A_n и B прямую b. Прямые, параллельные b, проходящие через точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$, пересекают отрезок AB в точках $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, которые делят отрезок AB на n равных отрезков (теорема 8.9).

Упражнения

1. Доказать, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше периметра четырехугольника (суммы его сторон), но больше полупериметра.

2. Доказать, что если диагонали четырехугольника пересекаются, то он выпуклый.

3. Четырехугольник деформируется, оставаясь выпуклым, так что его стороны не изменяются по длине. Доказать, что если одна диагональ увеличивается, то вторая уменьшается.

4. Доказать, что средины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

5. Доказать, что если диагонали выпуклого четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник есть параллелограмм.

6. Доказать, что параллелограмм, у которого диагонали равны, есть прямоугольник.

7. Доказать, что если диагонали параллелограмма являются биссектрисами соответствующих углов, то параллелограмм есть ромб.

8. Доказать, что выпуклый четырехугольник, у которого противоположные углы равны, есть параллелограмм.

9. Пусть a — прямая, не пересекающая сторон треугольника. Доказать, что сумма расстояний вершин треугольника от прямой a равна утроенному расстоянию точки пересечения медиан треугольника от этой прямой.

§ 9. ДВИЖЕНИЯ. РАВЕНСТВО ФИГУР. СИММЕТРИЯ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Пусть даны две фигуры F и F'. Мы будем говорить, что между точками фигур установлено *взаимно однозначное соответствие*, если точки фигур объединены в пары (X, X') так, что каждая точка X фигуры F и каждая точка X' фигуры F' принадлежит одной и только одной паре. Точки X и X' фигур будем называть *соответствующими точками*. Таким образом, каждая точка X фигуры F имеет вполне определенную соответствующую точку X' фигуры F' и наоборот. Вместо взаимно однозначного соответствия между точками фигур F и F' можно говорить о взаимно однозначном отображении фигуры F

на фигуру F'. Взаимно однозначное отображение называется так же *одно-однозначным*. Приведем пример.

Пусть фигура F есть прямая a, а фигура F' есть прямая a'. Пусть, далее, b — произвольная прямая, пересекающая a и a' (рис. 81). Произвольная прямая, параллельная b, пересекает прямую a в некоторой точке X, а прямую a' в некоторой точке X'. Объединим каждые такие две точки в пару (X, X'). Это объединение точек в пары есть одно-однозначное соответствие между прямыми a и a'.

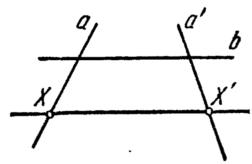

Рис. 81.

Взаимно однозначное отображение плоскости на себя называется *движением*, если оно сохраняет расстояния. Это значит, что если X и Y — две произвольные точки и X', Y' — соответствующие им точки, то $XY = X'Y'$.

Теорема 9.1. *Если при движении три точки A, B, C, лежащие на прямой, переходят в точки A', B', C', то эти точки также лежат на одной прямой. Если точка B лежит между A и C, то точка B' лежит между A' и C'.*

Доказательство. Если точки A', B', C' не лежат на одной прямой, то они являются вершинами треугольника. Поэтому $A'C' < A'B' + B'C'$. По свойству движения отсюда следует, что $AC < AB + BC$. Однако по свойству измерения отрезков $AC = AB + BC$. Мы приходим к противоречию. Итак, точки A', B', C' лежат на одной прямой. Покажем, что точка B' лежит между A' и C'. Допустим, что A' лежит между B' и C'. Тогда $A'B' + A'C' = B'C'$ и, следовательно, $AB + AC = BC$. Но это противоречит равенству, полученному выше: $AB + BC = AC$. Аналогично доказывается, что точка C' не может лежать между A' и B'. Теорема доказана.

Пусть задано некоторое движение, т. е. взаимно однозначное отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния. Пусть F — произвольная фигура в этой плоскости. Когда точка X описывает фигуру F, соответствующая ей при движении точка X' описывает некоторую фигуру F'. Эта фигура называется *равной* F.

Теорема 9.2. *Фигура, равная отрезку, есть равный ему отрезок. Фигура, равная треугольнику, есть равный ему треугольник.*

Читателя не должна смущать формулировка этой теоремы. Дело в том, что понятие равенства отрезков и треугольников нами введено раньше, до понятия равенства фигур вообще, которое введено только что. Отрезки мы называли равными, если они имели одинаковые длины. Треугольники мы называли равными, если они имели равные углы и соответствующие стороны. Теоремой утверждается, что понятие равенства фигур в применении к отрезкам и треугольникам имеет прежнее значение.

Доказательство теоремы 9.2. Пусть F — данный отрезок и F' — равная ему фигура. Пусть A и B — концы отрезка F, а A' и B' — соответствующие им точки фигуры F'. Возьмем произвольную точку X на отрезке F. По теореме 9.1 соответствующая точка X' фигуры F' принадлежит отрезку $A'B'$. Таким образом, все точки фигуры F' принадлежат отрезку $A'B'$.

Покажем теперь, что каждая точка отрезка $A'B'$ принадлежит фигуре F'. Пусть X' — произвольная точка отрезка $A'B'$. Три точки A', X', B' лежат на одной прямой, причем точка X' лежит между A' и B'. По свойству движения (теорема 9.1) точка X, соответствующая X', лежит на прямой AB между точками A и B, т. е. принадлежит отрезку AB. Следовательно, точка X' является точкой фигуры F'. Итак, точки отрезка $A'B'$ и только они являются точками фигуры F'. Следовательно, фигура F' есть отрезок $A'B'$. Этот отрезок имеет ту же длину $AB = A'B'$. Первое утверждение доказано.

Пусть теперь F есть треугольник ABC. Обозначим A', B', C' — точки фигуры F', соответствующие точкам A, B, C. Точки A', B', C' не лежат на одной прямой, так как в противном случае точки A, B, C лежали бы на одной прямой (теорема 9.1). По первой части теоремы, которая доказана, фигура F' состоит из трех отрезков $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$, т. е. является треугольником. Этот треугольник равен треугольнику ABC, так как $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Теорема доказана.

Точка X плоскости называется *неподвижной* точкой при данном движении, если соответствующая ей точка X' плоскости совпадает с X.

Теорема 9.3. *Если при движении три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, неподвижны, то все точки плоскости неподвижны.*

Доказательство. Пусть A и B — две неподвижные точки плоскости. Покажем, что все точки прямой AB являются неподвижными. Пусть X — произвольная точка прямой AB, отличная от точек A и B. Из трех точек A, B и X одна лежит между двумя другими. Пусть для определенности это будет точка X. По теореме 9.1 соответствующая точке X точка X' лежит на прямой AB между A и B. Таким образом, обе точки, X и X', лежат на полупрямой AB. Так как $AX = AX'$, то X' совпадает с X. В других случаях взаимного расположения точек A, B и X доказательство аналогично.

Пусть теперь A, B, C — три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой. Пусть X — произвольная точка плоскости. Проведем через точку X какую-нибудь прямую, которая имеет с прямыми AB, AC и BC две общие точки P и Q. По доказанному точки P и Q являются неподвижными. Поэтому все точки прямой PQ являются неподвижными. В частности, неподвижной будет точка X. Теорема доказана.

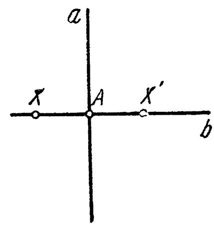

Рис. 82.

Пусть a — некоторая прямая и X — произвольная точка плоскости. Проведем через точку X прямую b, перпендикулярную a. Она пересечет прямую a в некоторой точке A. Построим теперь точку X' по следующему правилу. Если точка X лежит на прямой a, то X' совпадает с X, если X не лежит на a, то X' лежит в другой полуплоскости относительно прямой a на прямой b, причем расстояния AX и AX' равны (рис. 82). Точка X' называется *симметричной* точке X относительно прямой a. Точка X является симметричной точке X' относительно прямой a. Отображение плоскости на себя, при котором точке X сопоставляется точка X', симметричная относительно прямой a, называется *преобразованием симметрии* или *зеркальным отражением*.

Теорема 9.4. *Зеркальное отражение относительно прямой есть движение.*

Доказательство. Пусть X и Y — две произвольные точки и X', Y' — соответствующие им симметричные относительно прямой a точки. Утверждение теоремы состоит в том, что $XY = X'Y'$. Рассмотрим сначала случай, когда точки X и Y не лежат на прямой a и не лежат на прямой, перпендикулярной a (рис. 83). Прямоугольные треугольники ABX и ABX' равны, так как у них катет AB общий, а катеты XA и $X'A$ равны по определению симметрии. Отсюда следует, что $XB = X'B$, $\angle XBA =$

$=\angle X'BA$. Теперь треугольники XYB и $X'Y'B$ равны. У них $XB=X'B$, $YB=Y'B$, $\angle YBX=\angle Y'BX'$. Из равенства этих треугольников следует, что $XY=X'Y'$.

В других случаях расположения точек X и Y, когда одна или обе они лежат на прямой a или лежат на прямой, перпендикулярной a, устанавливается то же равенство $XY=X'Y'$. Читателю предлагается проверить это в качестве упражнения. Теорема доказана.

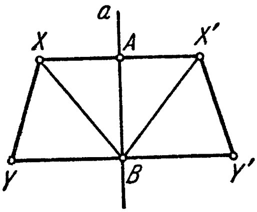

Рис. 83.

Если при зеркальном отражении относительно прямой a фигура F переходит в себя, то эта фигура называется *симметричной*, а прямая a называется *осью симметрии* фигуры. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является его осью симметрии. Диагонали ромба являются его осями симметрии. Прямые, проходящие

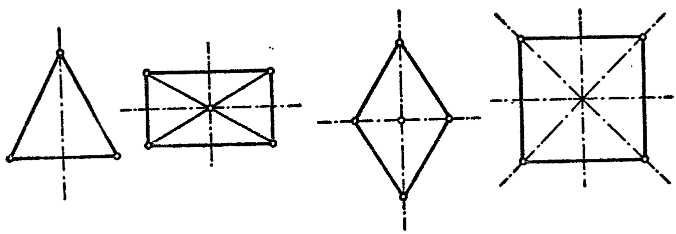
Рис. 84.

через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии. Диагонали квадрата и прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей параллельно его сторонам, являются осями симметрии (рис. 84). Читателю предлагается доказать эти утверждения в качестве упражнения.

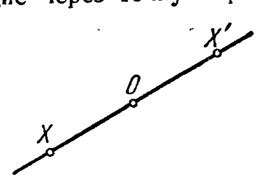

Рис. 85.

Пусть O — некоторая точка плоскости и X — произвольная точка. Построим точку X' по следующему правилу. Если точка X совпадает с O, то X' есть точка O. Если точка X не совпадает с O, то точка X' лежит на прямой XO, причем точка O лежит между X и X' и расстояния XO и OX' равны (рис. 85). Построенная так точка X' называется *симметричной* относительно точки O. Преобразование плоскости в себя, при котором каждой точке X по указанному правилу сопоставляется точка X', называется *преобразованием симметрии относительно точки O*.

Теорема 9.5. *Преобразование симметрии относительно точки есть движение.*

Доказательство. Пусть X и Y — две произвольные точки и X', Y' — соответствующие им точки при симметрии относительно точки O. Теоремой утверждается, что $XY = X'Y'$. Рассмотрим сначала случай, когда точки X и Y не совпадают с точкой O и не лежат на одной прямой, проходящей через точку O (рис. 86).

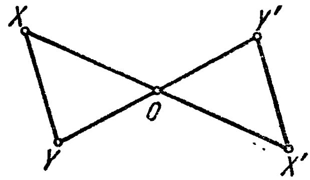

Рис. 86.

Треугольники XOY и $X'OY'$ равны. У них углы при вершине O равны, как вертикальные, а $XO = OX'$, $YO = OY'$ по определению симметрии. Из равенства треугольников следует, что $XY = X'Y'$.

В других случаях расположения точек X и Y относительно точки O получается то же заключение $XY = X'Y'$. Читателю предлагается проверить это в качестве упражнения. Теорема доказана.

Если при симметрии относительно точки O фигура F переходит сама в себя, то она называется *центральносимметричной*. Точка O называется *центром симметрии*. Параллелограмм является центральносимметричной фигурой. Его центром симметрии является точка пересечения диагоналей. Читателю предлагается доказать это утверждение в качестве упражнения.

Пусть O_1 и O_2 — две различные точки плоскости. Пусть X — произвольная точка плоскости. Построим точку X', симметричную точке X относительно точки O_1, а затем построим точку X'', симметричную точке X' относительно точки O_2 (рис. 87). Так как преобразование симметрии относительно точки сохраняет расстояния, то последовательное выполнение этих преобразований есть движение. Движение, которое сопоставляет точке X точку X'', построенную указанным образом, называется *параллельным переносом*.

Отрезок O_1O_2 является средней линией треугольника $XX'X''$ (рис. 87). Отсюда следует, что отрезок XX''

параллелен отрезку O_1O_2 и в два раза больше этого отрезка. Таким образом, при параллельном переносе точка X переходит в точку X'' прямой, параллельной O_1O_2, проходящей через точку X. Точка X'' находится на расстоянии $2O_1O_2$ от точки X.

Пусть a_1 и a_2 — две различные прямые, пересекающиеся в точке O. Пусть X — произвольная точка плоскости. Построим точку X', симметричную точке X относительно прямой a_1, а затем построим точку X'', симметричную точке X' относительно прямой a_2 (рис. 87, справа). Так как преобразование симметрии относительно прямой сохраняет расстояния, то последовательное выполнение этих

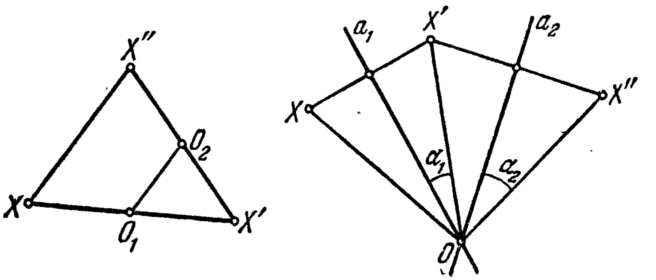

Рис. 87.

преобразований есть движение. Движение, которое сопоставляет точке X точку X'' указанным образом, называется *поворотом* относительно точки O.

Если прямые a_1 и a_2 перпендикулярны, то поворот сводится к симметрии относительно точки O. Если прямые a_1 и a_2 не перпендикулярны, то угол XOX'' не зависит от точки X и равен удвоенному острому углу, под которым пересекаются прямые a_1 и a_2. Этот угол называется *углом поворота*. Наметим доказательство этого утверждения.

Пусть точка X' находится внутри острого угла, образуемого прямыми a_1, a_2, и α_1, α_2 — части этого угла, на которые он разбивается полупрямой OX' (см. рис. 87, справа). Тогда по свойству симметрии относительно прямой угол XOX' равен $2\alpha_1$, а угол $X'OX''$ равен $2\alpha_2$. Соответственно угол XOX'' равен $2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Читателю предлагается рассмотреть случай, когда точка X' лежит внутри тупого угла, образуемого прямыми a_1 и a_2, а также случай, когда прямые a_1 и a_2 перпендикулярны.

Упражнения

1. Доказать, что треугольник ABC можно совместить с любым равным ему треугольником $A'B'C'$ не более чем тремя зеркальными отражениями.

2. Доказать, что любое движение можно получить не более чем тремя зеркальными отражениями.

3. Доказать, что если две точки A и B при движении остаются неподвижными, то либо все точки неподвижны, либо это движение есть зеркальное отражение относительно прямой AB.

4. Доказать, что если точки X и Y при параллельном переносе переходят в точки X', Y', то либо прямые XY и $X'Y'$ совпадают, либо они параллельны.

5. Доказать, что два зеркальных отражения, выполненных последовательно относительно двух параллельных прямых, дают параллельный перенос.

6. Даны две окружности k_1, k_2 и прямая a. Найти на окружностях k_1 и k_2 такие точки X_1 и X_2, чтобы прямая a была перпендикулярна отрезку X_1X_2 и пересекала его посредине.

7. Даны две окружности k_1, k_2 и точка O. Найти на окружностях такие точки X_1 и X_2, чтобы точка O была срединой отрезка X_1X_2.

§ 10. ОКРУЖНОСТЬ

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой данной точки. Эта точка называется *центром* окружности, а расстояние от центра до точек окружности называется *радиусом*. Радиусом называется также отрезок, соединяющий центр окружности с какой-нибудь ее точкой. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*.

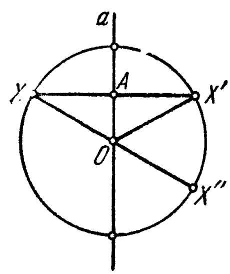

Рис. 88.

Теорема 10.1. *Каждый диаметр окружности является осью симметрии. Центр окружности является центром симметрии.*

Доказательство. Пусть a — диаметр окружности и X — произвольная точка окружности (рис. 88). Построим точку X', симметричную точке X относительно диаметра a. Из равенства прямоугольных треугольников OXA и $OX'A$ заключаем, что $OX = OX'$. А это значит, что точка X' лежит на окружности. Итак, при симметрии относительно диаметра окружность переходит в себя, т. е. диаметр является осью симметрии.

Построим теперь точку X'', симметричную точке X относительно центра (рис. 88). По определению симметрии $OX = OX''$, т. е. точка X'' лежит на окружности. Следовательно, центр окружности является центром симметрии. Теорема доказана.

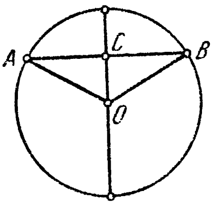

Рис. 89.

Т е о р е м а 10.2. *Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть AB — данная хорда и C — ее средина (рис. 89). Проведем диаметр через точку C. Треугольники OAC и OBC равны по третьему признаку равенства. Из равенства этих треугольников следует, что их углы при вершине C, будучи равными и смежными, прямые. Таким образом, диаметр OC перпендикулярен хорде AB и делит ее пополам. Другого перпендикулярного хорде AB диаметра не существует, так как через точку O можно провести только одну прямую, перпендикулярную прямой AB. Теорема доказана.

Т е о р е м а 10.3. ***Всякая хорда не больше диаметра. Она равна диаметру только тогда, если сама является диаметром.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, хорда AB не является диаметром (рис. 89). Тогда в треугольнике OAB имеем $AB < AO + BO$, а $AO + BO$ равно диаметру. Теорема доказана.

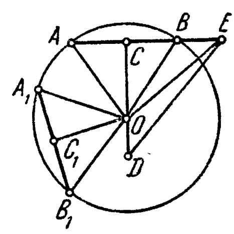

Рис. 90.

Т е о р е м а 10.4. ***Равные хорды одинаково удалены от центра окружности. Большая хорда ближе к центру.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть AB и A_1B_1 — данные хорды, C и C_1 — их средины (рис. 90). Если хорды равны, то прямоугольные треугольники OCB и OC_1B_1 равны. Отсюда следует, что хорды одинаково удалены от центра: $OC = OC_1$.

Пусть $AB < A_1B_1$. Покажем, что $OC > OC_1$. Допустим, что $OC \leqslant OC_1$. Построим треугольник DCE, равный OC_1A_1. По свойству наклонных $ED \geqslant OE > OB$. Но DE и OB равны радиусу. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Прямая, проходящая через точку A окружности, называется *касательной*, если она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку A. Точка A называется *точкой касания.*

Теорема 10.5. *Касательная имеет с окружностью только одну общую точку.*

Доказательство. Пусть B — любая точка касательной, отличная от точки касания A (рис. 91). По свойству перпендикуляра и наклонной $OB > OA$, т. е. точка B не может быть точкой окружности. Теорема доказана.

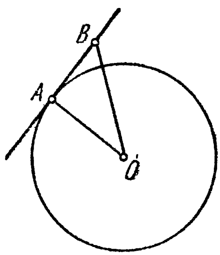

Рис. 91.

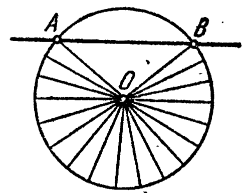

Рис. 92.

Пусть A и B — две точки окружности (рис. 92). Проведем через них прямую. Она разбивает плоскость на две полуплоскости. Части окружности, лежащие в этих полуплоскостях, мы будем называть *дугами окружности*. Если AB — диаметр, то дуги окружности называются *полуокружностями*.

Если хорда AB не является диаметром, то мы различаем дуги окружности следующим образом. Одна из полуплоскостей, определяемых прямой AB, содержит центр окружности. Дугу, которая лежит в этой полуплоскости, будем называть *дугой, большей полуокружности*, а другую дугу — *дугой, меньшей полуокружности*. Радиусы, проведенные в точки дуги, меньшей полуокружности, пересекают отрезок AB, а радиусы, проведенные в точки дуги, большей полуокружности, не пересекают отрезок AB.

Центральным углом, отвечающим данной дуге, мы будем называть фигуру, которая состоит из лучей, исходящих из центра окружности и пересекающих эту дугу. На рис. 92 показаны лучи угла, большего полуокружности.

Для центральных углов вводим угловую меру по следующему правилу. Если соответствующая дуга меньше полуокружности, то за меру центрального угла принимаем обычную меру угла, образуемого полупрямыми OA и OB. Если дуга равна полуокружности, т. е. AB есть диаметр, то угловую меру полагаем равной 180°. Наконец, если дуга больше полуокружности, за угловую меру принимаем $360° - \alpha°$, где $\alpha°$ — градусная мера дополнительного угла (меньшего полуокружности).

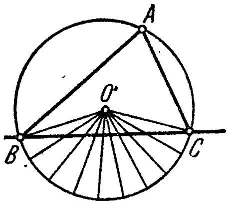

Рис. 93.

Угол, вершина которого A лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках B и C, отличных от A, называется *вписанным* в окружность (рис. 93). Прямая BC разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующий той из этих дуг, которая не содержит точку A, называется *центральным* углом, соответствующим данному вписанному углу.

Теорема 10.6. *Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда одна из сторон угла является диаметром (рис. 94). В этом случае центральный угол, соответствующий вписанному

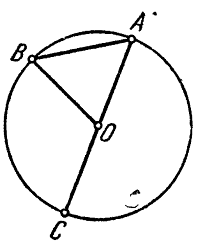

Рис. 94.

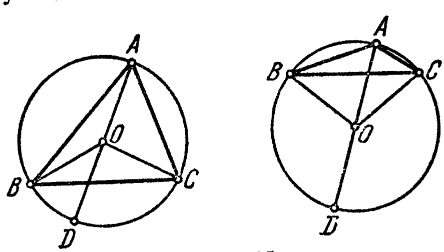

Рис. 95.

углу A, равен углу BOC. Треугольник AOB равнобедренный. Его углы A и B равны. Внешний угол треугольника при вершине O равен сумме углов A и B. Отсюда следует, что угол A равен половине соответствующего центрального угла.

Пусть теперь ни одна из сторон вписанного угла не является диаметром. Проведем диаметр из вершины A вписанного угла. Будем различать два случая: 1) стороны угла A разделяются диаметром AO (рис. 95); 2) стороны угла A не разделяются диаметром. Рассмотрим первый случай. По доказанному $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$, $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD$. Если центральный угол, соответствующий углу A, меньше полуокружности (рис. 95, слева), то отсюда заключаем, что $\angle BAC = \frac{1}{2} BOC$. Следовательно, угол BAC равен половине соответствующего центрального угла.

Если центральный угол, соответствующий вписанному углу A, больше полуокружности (рис. 95, справа), то $\angle BOD = 180° - \angle AOB$, $\angle COD = 180° - \angle AOC$. Отсюда заключаем, что $\angle BAC = \frac{1}{2}(360° - \angle BOC)$, т. е. угол BAC равен половине соответствующего центрального угла. Второй случай рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Из теоремы 10.6 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 10.7. *Все вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершина лежит на одной из дуг, определяемых прямой AB, равны* (рис. 96). *В частности, углы, опирающиеся на диаметр, прямые.*

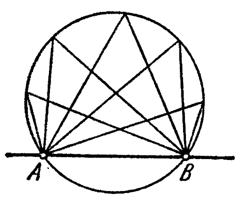

Рис. 96.

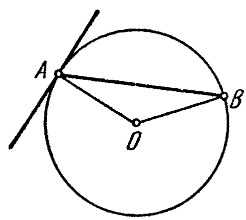

Рис. 97.

Теорема 10.8. *Углы между касательной к окружности и хордой с концом в точке касания измеряются половиной центральных углов, отвечающих дугам, на которые хорда делит окружность* (рис. 97).

Читателю предлагается доказать эту теорему в качестве упражнения.

Теорема 10.9. *Пусть даны окружность радиуса R с центром O и прямая a, которая проходит на расстоянии h от центра окружности. Тогда прямая не* *пересекает окружность, если $h > R$, прямая касается окружности, если $h = R$, прямая пересекает окружность в двух точках, если $h < R$.*

В одном из пунктов доказательства этой теоремы мы воспользуемся теоремой 13.1 (теоремой Пифагора). Эта теорема гласит, что у каждого прямоугольного треугольника квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Путь к доказательству теоремы Пифагора лежит через теоремы 11.5, 11.4, 11.2, 11.1. В этих теоремах и их доказательствах даже слово «окружность» не произносится. Поэтому теорема Пифагора доказывается независимо от теоремы 10.9 и ссылка на теорему Пифагора в доказательстве теоремы 10.9 вполне допустима.

Доказательство теоремы 10.9. Если $h > R$, то каждая точка прямой находится на расстоянии, большем R, от центра окружности и, следовательно, не может принадлежать окружности, т. е. прямая и окружность не пересекаются.

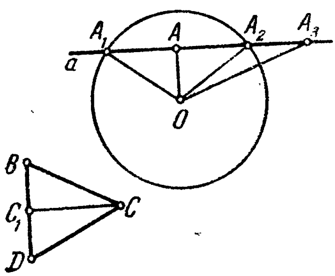

Рис. 98.

Если $h = R$, то основание перпендикуляра, опущенного из центра окружности на прямую, лежит на окружности. В этой точке окружность касается прямой по определению касательной.

Рассмотрим случай $h < R$ (рис. 98). Опустим из центра окружности перпендикуляр на прямую a. Пусть A — основание этого перпендикуляра. Отложим от точки A на прямой a отрезки AA_1 и AA_2, равные $\sqrt{R^2 - h^2}$. По теореме Пифагора

$$OA_1^2 = h^2 + (\sqrt{R^2 - h^2})^2 = R^2,$$

$$OA_2^2 = h^2 + (\sqrt{R^2 - h^2})^2 = R^2.$$

Итак, $OA_1 = OA_2 = R$. Следовательно, точки A_1 и A_2 лежат на окружности, т. е. являются точками пересечения прямой a и окружности.

Докажем, что других точек пересечения прямой и окружности не существует. Допустим, существует третья точка пересечения A_3. Тогда либо $AA_3 > AA_1$, либо $AA_3 < AA_1$. По свойству наклонных, проведенных из одной точки (теорема 5.6), в первом случае $OA_3 > OA_1 = R$, во втором случае $OA_3 < OA_1$, т. е. точка A_3 не лежит на окружности. Теорема доказана.

Четырехугольник называется *вписанным* в окружность, если его вершины лежат на окружности.

Теорема 10.10. *Сумма противолежащих углов вписанного выпуклого четырехугольника равна двум прямым.*

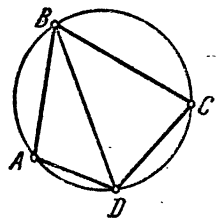

Рис. 99.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность (рис. 99). Согласно теореме 8.1 диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются. Отсюда следует, что вершины A и C принадлежат различным дугам, на которые прямая BD разбивает окружность. Поэтому центральные углы, соответствующие этим дугам, дополняют друг друга до 360°. А это значит, что углы A и C четырехугольника дополняют друг друга до 180°, т. е. их сумма равна двум прямым. Аналогично доказывается, что сумма углов B и D четырехугольника тоже равна двум прямым. Теорема доказана.

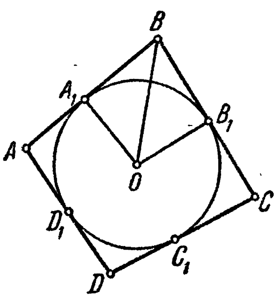

Рис. 100.

Четырехугольник называется *описанным* около окружности, если его стороны касаются окружности.

Теорема 10.11. *Суммы противолежащих сторон описанного четырехугольника равны.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник (рис. 100). Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки касания сторон с окружностью и O — центр окружности. Прямоугольные треугольники OA_1B и OB_1B равны. У них гипотенуза OB общая, а катеты OA_1 и OB_1 равны, как радиусы. Отсюда следует $BA_1 = BB_1$. Аналогично доказываются равенства $AA_1 = AD_1$, $DC_1 = DD_1$, $CC_1 = CB_1$. Складывая эти равенства почленно, получим $AA_1 + BA_1 + CC_1 + DC_1 = BB_1 + CB_1 + DD_1 + AD_1$, т. е. $AB + CD = AD + BC$. Теорема доказана.

З а д а ч а 10.12. *Построить касательную к данной окружности с центром O, проходящую через данную A.*

Р е ш е н и е (рис. 101). Строим окружность на отрезке OA, как на диаметре. Пусть B и B_1 — точки пересечения этой окружности с данной. Прямые AB и AB_1 являются касательными к данной окружности, так как углы OBA и OB_1A прямые (теорема 10.7).

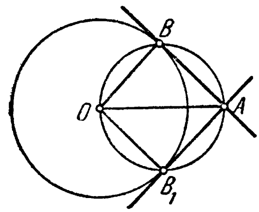

Рис. 101.

Упражнения

1. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки B на прямые, проходящие через данную точку A.

2. Найти геометрическое место вершин C треугольников ABC с заданным основанием AB и углом при вершине C.

3. Найти геометрическое место средин хорд, проходящих через данную точку.

4. Две окружности пересекаются в двух точках: C и C_1. Через точку C_1 проводят произвольную прямую a, которая пересекает окружности в точках A и B. Доказать, что угол ACB не зависит от прямой a.

5. Через точку касания двух окружностей проводят произвольную прямую a. Она пересекает окружности в точках A и B. Доказать, что касательные в точках A и B параллельны.

6. Построить треугольник ABC по стороне AB, углу C, высоте или медиане из угла C.

§ 11. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *подобными*, если у них

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1$$

и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Короче говоря, треугольники подобны, если у них соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны. Подобие треугольников обозначается значком $\sim$. В данном случае $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Т е о р е м а 11.1. *Если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то треугольники подобны.*

Доказательство. Так как сумма углов треугольника равна двум прямым, то из равенства углов A и A_1, B и B_1 следует равенство углов C и C_1. Докажем пропорциональность сторон.

Отложим на полупрямой AB отрезок AB_2, равный A_1B_1 (рис. 102). Проведем через точку B_2 прямую, параллельную BC. Она пересечет полупрямую AC в некоторой точке C_2. По свойству углов при параллельных BC и B_2C_2

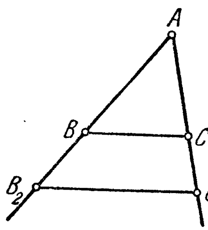

Рис. 102.

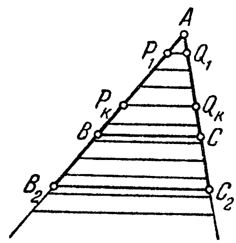

Рис. 103.

и секущей BB_2 углы ABC и AB_2C_2 равны. Поэтому треугольник AB_2C_2 равен треугольнику $A_1B_1C_1$, в частности $AC_2 = A_1C_1$.

Возьмем малый отрезок AP_1 на полупрямой AB так, чтобы два отношения $\frac{AB}{AP_1}$ и $\frac{AB_2}{AP_1}$ не были целыми. Построим на полупрямой AB точки P_2, P_3, P_4, ... так, чтобы $AP_k = kAP_1$. Пусть n — целое от деления $\frac{AB}{AP_1}$, а m — целое от деления $\frac{AB_2}{AP_1}$. Тогда точка B находится между P_n и P_{n+1}, а B_2 — между P_m и P_{m+1}.

Проведем через точки P_k прямые, параллельные BC. По теореме 8.9 эти прямые пересекают полупрямую AC в точках Q_1, Q_2, Q_3, ..., причем отрезки Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, ... равны. Точка C лежит между точками Q_n и Q_{n+1}, а точка C_2 — между Q_m и Q_{m+1} (рис. 103).

Имеем

$$nAP_1 < AB < (n+1)AP_1,$$
$$mAP_1 < AB_2 < (m+1)AP_1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AB}{AB_2} < \frac{n+1}{m}. \qquad (1)$$

Аналогично получаем

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AC}{AC_2} < \frac{n+1}{m}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что

$$\frac{n}{m+1} - \frac{n+1}{m} < \frac{AB}{AB_2} - \frac{AC}{AC_2} < \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1},$$

т. е.

$$\left|\frac{AB}{AB_2} - \frac{AC}{AC_2}\right| < \frac{m+n+1}{m(m+1)}.$$

Так как $n \leqslant m$, то

$$\frac{m+n+1}{m(m+1)} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m} < \frac{2}{m}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{AB}{AB_2} - \frac{AC}{AC_2}\right| < \frac{2}{m}. \qquad (3)$$

Если взять отрезок AP_1 достаточно малым, то число m будет сколь угодно велико, а $\frac{2}{m}$ будет сколь угодно мало. Поэтому неравенство (3), справедливое при любом m, возможно только тогда, когда

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}.$$

Так как $AB_2 = A_1B_1$, а $AC_2 = A_1C_1$, то

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Теорема доказана.

Теорема 11.2. *Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ и*

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \qquad (4)$$

то треугольники подобны.

Доказательство. Построим треугольник $A_2B_2C_2$, у которого $A_2B_2 = A_1B_1$, $\angle A_2 = \angle A$, $\angle B_2 = \angle B$. По теореме 11.1 треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны. Следовательно,

$$\frac{AB}{A_2B_2}=\frac{AC}{A_2C_2}. \qquad (5)$$

Так как $A_2B_2=A_1B_1$, то из равенств (4) и (5) следует, что $A_2C_2=A_1C_1$. Теперь заключаем о равенстве треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. У них $A_1B_1=A_2B_2$, $A_1C_1=A_2C_2$, $\angle A_1=\angle A_2$. Так как треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ равны, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Теорема доказана.

Теорема 11.3. *Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$*

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}, \qquad (6)$$

то треугольники подобны.

Доказательство. Построим треугольник $A_2B_2C_2$, у которого $A_2B_2=A_1B_1$, $A_2C_2=A_1C_1$ и $\angle A_2=\angle A$. По теореме 11.2 треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны. Следовательно,

$$\frac{AC}{A_2C_2}=\frac{BC}{B_2C_2}. \qquad (7)$$

Так как $A_2C_2=A_1C_1$, то из равенств (6) и (7) следует, что $B_2C_2=B_1C_1$. Теперь заключаем о равенстве треугольников $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ по третьему признаку равенства. Так как треугольник ABC подобен треугольнику $A_2B_2C_2$, а треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Теорема доказана.

Теорема 11.4. *Два прямоугольных треугольника подобны, если выполняется одно из следующих условий:*

1) *один из острых углов первого треугольника равен одному из острых углов второго треугольника;*

2) *катеты первого треугольника пропорциональны катетам второго треугольника;*

3) *гипотенуза и катет первого треугольника пропорциональны гипотенузе и катету второго треугольника.*

Доказательство. Подобие треугольников при условии 1) следует из теоремы 11.1, так как прямые углы треугольников равны. Подобие треугольников при условии 2) следует из теоремы 11.2, так как катеты заключают равные (прямые) углы.

Докажем подобие треугольников при выполнении третьего условия.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — прямоугольные треугольники с прямыми углами C и C_1, причем

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \tag{8}$$

Построим прямоугольный треугольник $A_2B_2C_2$ с прямым углом C_2, с катетом A_2C_2, равным A_1C_1, и острым углом A_2, равным A.

Треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC, так как выполняется условие 1). Поэтому

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{AC}{A_2C_2}. \tag{9}$$

Так как $A_2C_2 = A_1C_1$, то из равенств (8) и (9) следует, что $A_2B_2 = A_1B_1$. По теореме 5.7 о равенстве прямоугольных треугольников треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ равны. Так как треугольник ABC подобен треугольнику $A_2B_2C_2$, а треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Теорема доказана.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C (рис. 104). Проведем из вершины прямого угла высоту CD. По теореме 5.9 основание D высоты лежит между A и B. Отрезки AD и BD называются *проекциями* катетов на гипотенузу.

Теорема 11.5. *У прямоугольного треугольника высота, проведенная из прямого угла, есть среднее геометрическое между проекциями катетов на гипотенузу. Каждый катет есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу.*

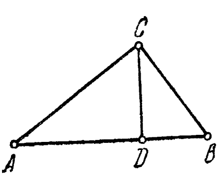

Рис. 104.

Доказательство (рис. 104). Углы CAD и BCD равны, так как каждый из них дополняет угол ABC до прямого. По теореме 11.4 треугольники CAD и BCD подобны. Из подобия треугольников следует

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}.$$

Отсюда $CD^2 = AB \cdot BD$, т. е. $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$. Первое утверждение доказано.

Из подобия треугольников BCD и BAC следует, что

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{BD}.$$

Отсюда $CB^2=AB\cdot BD$, т. е. $CB=\sqrt{AB\cdot BD}$. Аналогично доказывается, что $AC=\sqrt{AB\cdot AD}$. Теорема доказана.

Теорема 11.6. *Биссектриса AD треугольника ABC делит противоположную сторону BC на отрезки, пропорциональные сторонам AB и AC, т. е.*

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}.$$

Доказательство (рис. 105). Если угол ADC прямой, то утверждение теоремы следует из равенства треугольников ADB и ADC. Если угол ADC не прямой, то один из углов ADB или ADC тупой. Пусть для определенности ADB — тупой угол. Опустим из точки B перпендикуляр BE на прямую AD. Точка D лежит между A и E (теорема 5.9). Построим точку D_1, симметричную точке D относительно точки E. Угол BD_1D равен углу BDD_1, следовательно, равен углу ADC. Треугольники ABD_1 и ACD подобны, так как $\angle BAD_1=\angle CAD$, а $\angle AD_1B=\angle ADC$. Из подобия треугольников следует пропорция

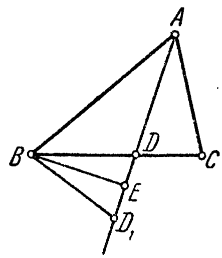

Рис. 105.

$$\frac{BD_1}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

Но $BD_1=BD$. Поэтому $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$, т. е.

$$\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}.$$

Теорема доказана.

Пусть дана окружность с центром O и радиусом R. Если точка X плоскости находится на расстоянии, меньшем R, от центра O окружности, то мы будем говорить, что эта точка лежит *внутри* окружности. Если точка X

находится на расстоянии, большем R, то мы будем говорить, что она лежит *вне* окружности.

Теорема 11.7. *Если прямая проходит через точку S, лежащую внутри окружности, то эта прямая пересекает окружность в двух точках, причем точка S лежит между этими точками.*

Доказательство. То, что прямая пересекает окружность в двух точках, следует из теоремы 10.9, так как прямая отстоит от центра на расстоянии, меньшем радиуса. Докажем, что точка S лежит между точками пересечения.

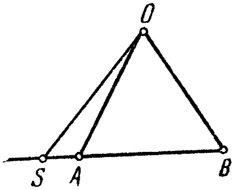

Рис. 106.

Пусть O — центр окружности и A, B — точки пересечения прямой с окружностью (рис. 106). Если точка S не лежит между A и B, то либо точка A лежит между B и S, либо точка B лежит между A и S. Пусть для определенности A лежит между B и S, как изображено на рисунке. Треугольник AOB равнобедренный, $OA = OB$. Поэтому угол OAB острый. Соответственно смежный ему угол OAS тупой. Поэтому в треугольнике OSA должно быть $OS > OA$. Но OA — радиус окружности, а OS меньше радиуса по условию. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 11.8. *Пусть через точку S, лежащую внутри окружности, проходит произвольная прямая. Пусть A и B — точки пересечения этой прямой с окружностью. Тогда произведение отрезков AS и BS не зависит от взятой прямой, т. е. $AS \cdot BS$ постоянно.*

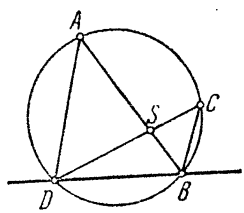

Рис. 107.

Доказательство. Проведем любую другую прямую через точку S. Она пересечет окружность в точках C и D (рис. 107). Проведем через точки B и D прямую. Она разделяет окружность на две дуги. Точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой BD, именно в той полуплоскости, где лежит точка S. Поэтому точки A и C принадлежат одной дуге. Отсюда по теореме 10.6 заключаем, что углы DAB и DCB равны. Аналогично доказывается, что углы ADC и ABC равны. Теперь по теореме 11.1

заключаем о подобии треугольников ASD и CSB. Из подобия треугольников следует пропорция

$$\frac{AS}{CS}=\frac{DS}{BS},$$

т. е. $AS \cdot BS = CS \cdot DS$. Теорема доказана.

Теорема 11.9. *Пусть точка S лежит вне окружности с центром O и a — прямая, проходящая через точку S, пересекающая окружность в точках A и B. Тогда точка S не разделяет точки A и B, т. е. не лежит между A и B.*

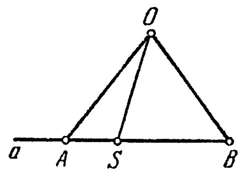

Рис. 108.

Доказательство. Предположим, что точка S разделяет точки A и B (рис. 108). Треугольник AOB равнобедренный, так как OA и OB — радиусы. Поэтому углы A и B острые. Из двух смежных углов OSA и OSB один не меньше прямого. Допустим, это угол OSA. Тогда в треугольнике OSA должно быть $OA > OS$. Но OA — радиус окружности, а OS больше радиуса по условию. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 11.10. *Пусть через точку S, лежащую вне окружности, проходит произвольная прямая, пересекающая окружность в точках A и B. Тогда произведение отрезков SA и SB не зависит от взятой прямой и равно квадрату отрезка касательной SC* (рис. 109).

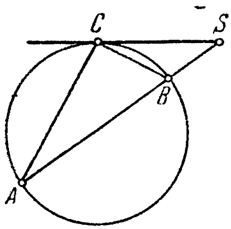

Рис. 109.

Доказательство. Пусть точка B лежит между A и S, как изображено на рисунке. Тогда треугольники SAC и SCB подобны. У них угол S общий, а углы CAB и BCS равны, так как измеряются половиной одного и того же центрального угла. Из подобия треугольников следует пропорция

$$\frac{CS}{AS}=\frac{SB}{CS}.$$

Отсюда $AS \cdot BS = (CS)^2$. Теорема доказана.

Задача 11.11. *Даны три отрезка a, b, c. Построить четвертый отрезок $x=\frac{bc}{a}$.*

Решение. Проведем из произвольной точки O две полупрямые p и q, не лежащие на одной прямой (рис. 110). На полупрямой p отложим отрезки $OA=a$ и $OB=b$. На полупрямой q отложим отрезок $OC=c$. Соединим точки A и C прямой и проведем прямую, параллельную AC, через точку B. Она пересекает полупрямую q в точке D. Из подобия треугольников OAC и OBD следует, что отрезок $OD=\frac{bc}{a}$.

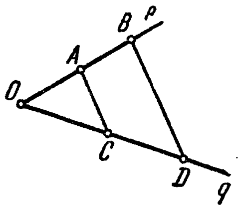

Рис. 110.

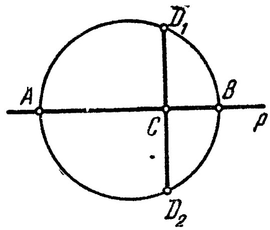

Рис. 111.

Задача 11.12. *Даны два отрезка a и b. Построить отрезок* $x=\sqrt{ab}$.

Решение. На произвольной прямой p отметим точку C и отложим от этой точки в разные стороны на прямой p отрезки CA и CB, равные a и b соответственно (рис. 111). Построим на отрезке AB, как на диаметре, окружность. Перпендикуляр к AB, проходящий через точку C, пересекает окружность в двух точках: D_1 и D_2. Отрезок CD_1 равен $\sqrt{ab}$, так как $CD_1=CD_2$, а $CD_1\cdot CD_2=ab$ (теорема 11.8).

Упражнения

1. Биссектриса внешних углов при вершине C треугольника ABC пересекается с прямой AB в точке D. Доказать, что

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}.$$

2. Доказать, что геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно (не равно единице), есть окружность.

3. Доказать, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных пересекающихся прямых постоянно, состоит из двух прямых.

4. Пусть диагонали выпуклого четырехугольника точкой пересечения делятся на отрезки, произведения которых одинаковы. Доказать, что тогда четырехугольник — вписанный в окружность.

5. На прямой даны три точки A, B, C. Точка B лежит между A и C. Через точки A и B проводим произвольную окружность, а из точки C проводим касательную к этой окружности. Доказать, что геометрическое место точек касания есть окружность с центром C.

6. Доказать, что геометрическое место точек, для которых касательные к двум данным пересекающимся окружностям равны, есть прямая, проходящая через точки пересечения окружностей. Эта прямая называется *радикальной осью* окружностей.

7. Доказать, что радикальные оси трех попарно пересекающихся окружностей либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

8. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36°. Доказать, что биссектриса треугольника, проведенная из вершины при основании, отсекает треугольник, подобный данному.

§ 12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ. ГОМОТЕТИЯ. ИНВЕРСИЯ

Преобразованием подобия называется взаимно однозначное отображение плоскости на себя, при котором для любых двух точек X и Y и соответствующих им точек X', Y' отношение $\frac{XY}{X'Y'}$ постоянно, т. е. не зависит от взятых точек X и Y. Это отношение называется *коэффициентом подобия.*

Пусть O — произвольная точка плоскости. Поставим в соответствие каждой точке X плоскости точку X' по следующему правилу. Если точка X совпадает с O, то X' есть точка O. Если X отлична от O, то X' лежит на полупрямой OX на расстоянии $k \cdot OX$ от точки O, т. е. $OX' = k \cdot OX$. Отображение плоскости на себя, при котором точке X сопоставляется таким образом точка X', называется *гомотетией.* Точка O называется *центром гомотетии,* а число k — *коэффициентом гомотетии.*

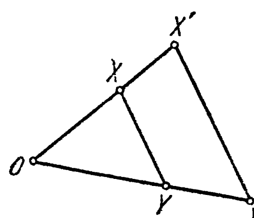

Рис. 112.

Теорема 12.1. *Гомотетия есть преобразование подобия.*

Доказательство. Пусть X и Y — две произвольные точки плоскости, не лежащие на одной прямой с точкой O (рис. 112). Треугольники OXY и $OX'Y'$ подобны, так как у них угол O общий, а

$$\frac{OX}{OX'} = \frac{OY}{OY'} = k.$$

Из подобия треугольников следует, что отношение $\frac{XY}{X'Y'}$ постоянно (равно k). К тому же выводу приходим в случае, когда точки O, X и Y лежат на одной прямой. Теорема доказана.

Теорема 12.2. *Любое преобразование подобия сводится к гомотетии и движению, т. е. получается последовательным применением гомотетии и движения.*

Доказательство. Рассматриваемое преобразование подобия сопоставляет каждой точке X некоторую точку X'. Пусть k — коэффициент подобия. Рассмотрим гомотетию относительно произвольного центра O с коэффициентом гомотетии k. Эта гомотетия переводит точку X в некоторую точку X''. Преобразование подобия сводится к двум преобразованиям: первое переводит точку X в точку X'' — это гомотетия, второе переводит точку X'' в X'. Второе преобразование сохраняет расстояния и, следовательно, является движением. Теорема доказана.

Из определения гомотетии следует, что каждая прямая при гомотетии переходит или в себя, если она проходит через центр гомотетии, или в параллельную прямую. Действительно, пусть XY — произвольная прямая, не проходящая через центр гомотетии (рис. 112). Из подобия треугольников OXY и $OX'Y'$ следует, что прямая XY переходит в прямую $X'Y'$, т. е. параллельную прямую. Отсюда следует, что параллельные прямые при гомотетии переходят в параллельные. Прямые пересекающиеся переходят в прямые пересекающиеся, причем углы между пересекающимися прямыми сохраняются. Очевидно, что указанные свойства сохраняются при движении. Поэтому получается следующая теорема.

Теорема 12.3. ***Преобразование подобия переводит прямые в прямые, прямые параллельные переводит в прямые параллельные, прямые пересекающиеся переводит в прямые пересекающиеся и сохраняет углы между пересекающимися прямыми.***

Пусть O — произвольная точка плоскости. Рассмотрим следующее преобразование плоскости. Пусть X — точка плоскости, отличная от O. Сопоставим точке X точку X', лежащую на луче OX на расстоянии от точки O, равном $\frac{R^2}{OX}$, где R — некоторое число. Это преобразование называется *инверсией* относительно центра O. Число R называется *радиусом инверсии.* Преобразование инверсии определено для всех точек X, кроме O.

Преобразование инверсии можно наглядно представить себе следующим образом. Проведем окружность с центром O и радиусом R (рис. 113). Для того чтобы построить точку X', соответствующую точке X, надо провести касательную к окружности и опустить перпендикуляр из точки касания на прямую OX. По теореме 11.5 $OX' = \frac{OA^2}{OX}$. Очевидно, при инверсии точке X' соответствует точка X. Поэтому ясно, как найти точку X', соответствующую X, когда X лежит внутри окружности.

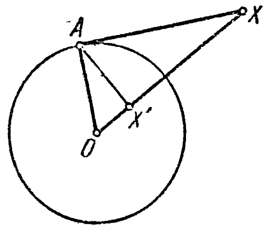

Рис. 113.

Теорема 12.4. *Два последовательных преобразования инверсии относительно одного и того же центра O сводятся к гомотетии относительно этого центра.*

Доказательство. Пусть R_1 и R_2 — радиусы первой и второй инверсии. Первая инверсия переводит точку X в точку X' луча OX на расстоянии $OX' = \frac{R_1^2}{OX}$ от центра O. Вторая инверсия переводит точку X' в точку X'' луча OX на расстоянии $OX'' = \frac{R_2^2}{OX'} = \frac{R_2^2 \cdot OX}{R_1^2}$ от точки O. В итоге, как видим, получается гомотетия с центром O и коэффициентом гомотетии $k = \frac{R_2^2}{R_1^2}$. Теорема доказана.

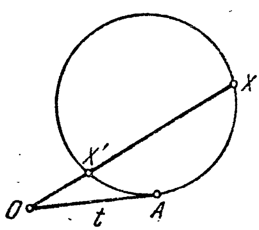

Рис. 114.

Теорема 12.5. *При инверсии окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность.*

Доказательство. Пусть O — центр инверсии, а R — радиус инверсии. Рассмотрим сначала случай, когда точка O лежит вне окружности (рис. 114). Обозначим через t длину отрезка OA касательной, проведенной из точки O, к окружности. Данную инверсию мы можем получить, выполняя последовательно сначала инверсию с центром O и радиусом инверсии t, а затем гомотетию с коэффициентом гомотетии $\frac{R^2}{t^2}$.

По теореме 11.10 $OX \cdot OX' = t^2$ (рис. 114). Отсюда следует, что данная окружность в случае радиуса инверсии t переходит в себя, следовательно, в окружность. Последующая гомотетия переводит ее снова в окружность. В итоге окружность переходит в окружность при любой инверсии.

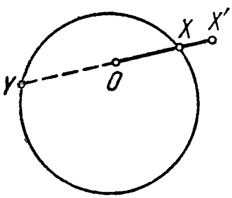

Рис. 115.

Пусть теперь точка O находится внутри данной окружности (рис. 115). Обозначим через s среднее геометрическое отрезков OX и OY какой-нибудь хорды окружности, проходящей через точку O. По теореме 11.8 s не зависит от хорды. Данную инверсию можно получить, выполняя последовательно инверсию с радиусом s и гомотетию с коэффициентом $\frac{R^2}{s^2}$. Инверсия с радиусом s переводит данную окружность в окружность, симметричную относительно точки O, а гомотетия переводит эту окружность снова в окружность. Теорема доказана полностью.

Теорема 12.6. *Прямая, проходящая через центр инверсии, при инверсии переходит в себя. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии. Окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую.*

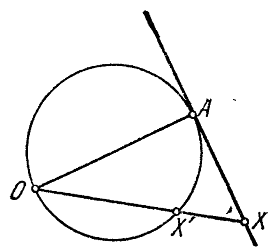

Рис. 116.

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно. Докажем второе утверждение (рис. 116). Пусть h — расстояние до прямой. Данную инверсию с радиусом R можно получить, выполняя последовательно инверсию с радиусом h и гомотетию с коэффициентом $\frac{R^2}{h^2}$.

Опустим из точки O — центра инверсии перпендикуляр на данную прямую. Пусть A — основание этого перпендикуляра. Построим на отрезке OA, как на диаметре, окружность. По теореме 11.5 $OA^2 = OX' \cdot OX$. Отсюда следует, что инверсия с радиусом h переводит данную прямую в окружность, проходящую через точку O. Последующая гомотетия переводит ее снова в окружность, проходящую через точку O. Второе утверждение доказано.

Докажем третье утверждение. Пусть d — диаметр окружности. Данную инверсию можно получить, выполняя сначала инверсию с радиусом d, а затем гомотетию с коэффициентом $\frac{R^2}{d^2}$. Инверсия с радиусом d переводит окружность в прямую — касательную в точке диаметрально противоположной O. Последующая гомотетия переводит ее снова в прямую. Теорема доказана полностью.

Мы говорим, что *прямая* и *окружность пересекаются под* таким-то *углом*, имея в виду угол, под которым пересекаются данная прямая и касательная к окружности в точке пересечения. *Углом пересечения двух окружностей* мы называем угол, под которым пересекаются их касательные в общей точке.

Теорема 12.7. *Преобразование инверсии сохраняет касание прямых и окружностей. Преобразование инверсии сохраняет углы пересечения прямых и окружностей.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если прямая и окружность или две окружности касаются, то они имеют только одну общую точку. И обратно, если прямая и окружность или две окружности имеют только одну общую точку, то они касаются в этой точке.

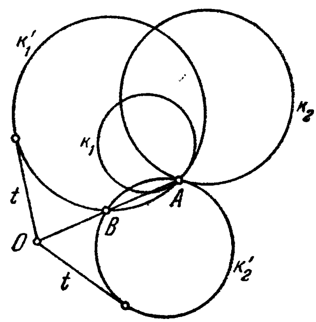

Рис. 117.

Преобразование инверсии является взаимно однозначным отображением плоскости, из которой удалена одна точка — центр инверсии. Отсюда следует, что если окружность и прямая или две окружности имеют только одну общую точку, то полученные преобразованием инверсии прямые или окружности также имеют только одну общую точку. Поэтому преобразование инверсии сохраняет касание.

Покажем теперь, что углы пересечения при инверсии сохраняются. Пусть мы имеем две окружности k_1 и k_2 пересекающиеся в точке A (рис. 117). Пусть касательные к этим окружностям в точке A не проходят через центр инверсии. Возьмем на отрезке OA произвольную точку B и проведем окружности k'_1 и k'_2, касательные к k_1 и k_2 соответственно в точке A и проходящие через точку B. Окружности k'_1 и k'_2 пересекаются в точках A и B под равными углами, так как фигура, составленная из этих окружностей, симметрична относительно перпендикуляра, проведенного к отрезку AB через его средину.

По теореме 11.10 касательные к окружностям k'_1 и k'_2 имеют одинаковую длину t. Инверсия с радиусом t переводит каждую из окружностей k'_1 и k'_2 в себя, а точку пересечения A в точку пересечения B. Таким образом, эта инверсия действительно сохраняет углы пересечения окружностей k'_1 и k'_2.

Так как окружности k_1 и k_2 касаются окружностей k'_1 и k'_2, а касание сохраняется при инверсии, то угол пересечения окружностей k_1 и k_2 тоже сохраняется. Общая инверсия получается из инверсии с радиусом t и гомотетии, а гомотетия сохраняет углы.

В случае, если касательная к одной из окружностей k_1, k_2 в точке A проходит через точку O, вместо окружности k'_1 или k'_2 берем прямую OA. Читателю предлагается рассмотреть случай пересечения прямой и окружности и двух прямых.

Преобразования гомотетии и инверсии являются важным средством решения задач на построение с помощью циркуля и линейки. Приведем пример.

Задача 12.8. *Построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся двух данных пересекающихся прямых.*

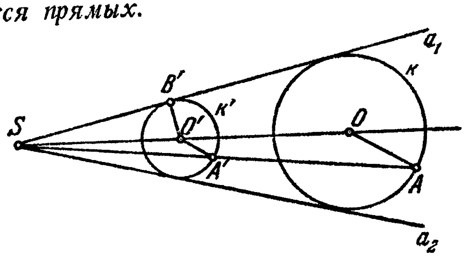

Рис. 118.

Решение. Пусть k — искомая окружность (рис. 118). Проведем биссектрису угла, образуемого прямыми a_1 и a_2, внутри которого лежит точка A. Центр O окружности k

лежит на этой биссектрисе. Возьмем на биссектрисе произвольную точку O', опустим из нее перпендикуляр $O'B'$ на прямую a_1 и радиусом $O'B'$ из центра O' опишем окружность k'. Проведем полупрямую SA и обозначим A' точку пересечения ее с окружностью k'.

Преобразование гомотетии с центром S и коэффициентом гомотетии $\frac{SA}{SA'}$ переводит окружность k' в k. Отсюда следует, что для построения центра O искомой окружности надо провести прямую через точку A параллельно прямой $A'O'$. Точка пересечения этой прямой с биссектрисой и есть центр окружности k.

Задача 12.9. *Построить окружность k, проходящую через данную точку A и касающуюся двух данных пересекающихся окружностей k_1 и k_2* (рис. 119).

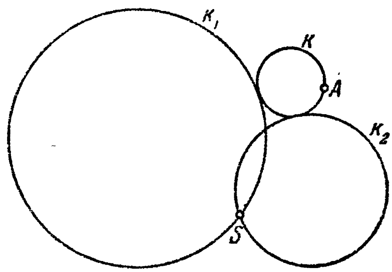

Рис. 119.

Решение. Пусть S — точка пересечения окружностей k_1 и k_2. Подвергнем наши окружности преобразованию инверсии относительно точки S. При этом окружности k_1 и k_2 перейдут в прямые a_1 и a_2. Точка A перейдет в некоторую точку A'. Окружность k перейдет в окружность k', касающуюся прямых a_1 и a_2 и проходящую через точку A'. Мы знаем, как построить окружность k' (задача 12.8). Обратное преобразование, являющееся также инверсией, переведет окружность k' в искомую окружность k.

Упражнения

1. Даны две пересекающиеся окружности k_1 и k_2. Окружность k пересекает под прямым углом каждую из окружностей k_1 и k_2. Доказать, что окружность k пересекает под прямым углом любую окружность, проходящую через точки пересечения окружностей k_1 и k_2.

2. Построить окружность, проходящую через данную точку, пересекающую под прямым углом две данные пересекающиеся окружности.

3. Найти геометрическое место центров окружностей, пересекающих две данные пересекающиеся окружности под прямым углом.

§ 13. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Теорема 13.1 (теорема Пифагора). *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C (рис. 120). Проведем высоту треугольника из вершины C. Согласно теореме 5.9 основание высоты лежит между точками A и B. По теореме 11.5

$$AC^2 = AD \cdot AB, \qquad BC^2 = BD \cdot AB.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что $AD + BD = AB$, получим

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Теорема доказана.

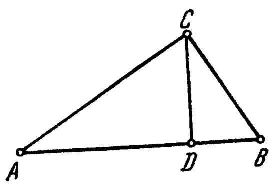

Рис. 120.

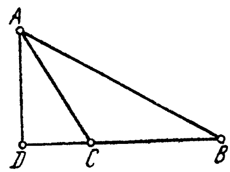

Рис. 121.

Теорема 13.2. *В любом треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон на проекцию другой стороны.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник с тупым углом C (рис. 121). Проведем высоту AD из вершины A. По теореме 5.9 точка C лежит между B и D. Применим теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам ADB и ADC, получим

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2.$$

Замечая, что $BD = BC + DC$, получим

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC.$$

Теорема доказана.

Теорема 13.3. *В любом треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на проекцию другой стороны.*

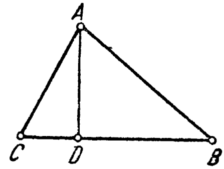

Рис. 122.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник с острым углом C (рис. 122). Проведем высоту AD треугольника. По теореме 5.9 точки B и D лежат по одну сторону от точки C на прямой BC. Поэтому либо точка D лежит между C и B, либо точка B лежит между C и D. Пусть для определенности D лежит между C и B, как изображено на рисунке.

Применяя теорему Пифагора к треугольникам ADC и ADB, получим

$$AB^2 = BD^2 + AD^2,$$
$$AC^2 = CD^2 + AD^2.$$

Вычитая эти равенства почленно и замечая, что $BD = BC - CD$, получим

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD.$$

Если точка B лежит между C и D, доказательство аналогично. Теорема доказана.

Теорема 13.4. *В любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.*

Доказательство. Если параллелограмм является прямоугольником (рис. 123, слева), то по теореме Пифагора

$$AC^2 = AD^2 + DC^2,$$
$$BD^2 = BC^2 + DC^2.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что $DC = AB$, получим

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Пусть теперь параллелограмм не является прямоугольником (рис. 123, справа). Опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 из вершин A и B на прямую CD. Из равенства треугольников ADA_1 и BCB_1 следует, что $DA_1 = CB_1$. Углы ADC и BCD, как внутренние односторонние при параллельных AD и BC, дополняют друг друга до 180°. Поэтому, если один из углов острый, то другой — тупой.

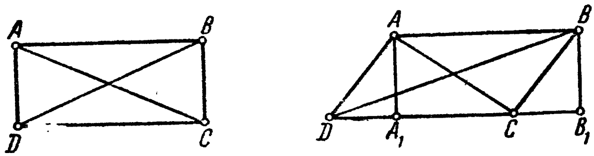

Рис. 123.

Пусть для определенности угол ADC острый, а угол BCD тупой, как изображено на рисунке.

Применяя теорему 13.2 к треугольнику BCD и теорему 13.3 к треугольнику ADC, получим

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2DC \cdot CB_1,$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2DC \cdot DA_1.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что $CB_1 = DA_1$, $CD = AB$, получим

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Теорема доказана.

Согласно теореме 5.4 сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны. Естественно возникает вопрос: всякие ли три числа могут быть сторонами некоторого треугольника, если сумма любых двух из этих чисел больше третьего. Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 13.5. *Каковы бы ни были три числа a, b, c такие, что сумма любых двух из этих чисел больше третьего, существует треугольник со сторонами, равными a, b,* с.

Доказательство. Пусть для определенности $c \geqslant b \geqslant a$. Обозначим

$$a_1 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

Число $a_1 > 0$, так как $c \geqslant b$. Число a_1 меньше a. В самом деле,

$$a - a_1 = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - (c-a)^2}{2c}.$$

Так как $a+b>c$, то $b>c-a>0$. Поэтому $b^2>(c-a)^2$. Следовательно, $a>a_1$.

Построим треугольник ABC следующим образом. Возьмем отрезок AB, равный c (рис. 124). Из точки A на полупрямой AB отложим отрезок AD, равный a_1. Из точки D восстановим перпендикуляр DC, равный $\sqrt{a^2-a_1^2}$. Утверждаем, что треугольник ABC имеет стороны a, b, c.

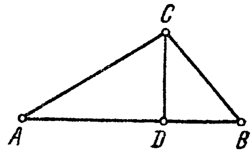

Рис. 124.

Действительно, сторона AB равна c. По теореме Пифагора

$$AC^2=AD^2+CD^2=$$
$$=a_1^2+\left(\sqrt{a^2-a_1^2}\right)^2=a^2,$$

т. е. $AC=a$. По теореме 13.3

$$BC^2=a^2+c^2-2ca_1=b^2,$$

т. е. $BC=b$. Теорема доказана.

Теорема 13.5 позволяет полностью охарактеризовать взаимное расположение двух окружностей. Именно, пусть даны две различные окружности с центрами O_1 и O_2, радиусами R_1 и R_2, $R_1\leqslant R_2$, и расстоянием между центрами d. Тогда:

1. *Окужности не пересекаются, т. е. не имеют общих точек, если*

$$R_1+R_2<d \quad \textit{или} \quad R_2-R_1>d.$$

2. *Окружности имеют одну общую точку, в которой они касаются, т. е. имеют общую касательную, если*

$$R_1+R_2=d \quad \textit{или} \quad R_2-R_1=d.$$

3. *Окружности пересекаются в двух точках, т. е. имеют две общие точки, если*

$$R_1+R_2>d \quad \textit{и} \quad R_2-R_1<d. \qquad (1)$$

Мы ограничимся доказательством третьего утверждения и предлагаем читателю рассмотреть первые два.

По теореме 13.5 существует треугольник A_1AA_2 со сторонами $A_1A=R_1$, $A_2A=R_2$, $A_1A_2=d$. Действительно, $R_1+R_2>d$, $R_1+d>R_2$ по условиям (1), а $R_2+d>R_1$ потому, что $R_2\geqslant R_1$.

Отложим от полупрямой O_1O_2 угол, равный углу A_1 треугольника A_1AA_2. На стороне этого угла отложим отрезок O_1B, равный $A_1A=R_1$. Треугольник O_1BO_2 равен треугольнику A_1AA_2. Отсюда $O_1B = A_1A = R_1$, $O_2B = A_2A = R_2$. Следовательно, точка B является точкой пересечения наших окружностей. Точка B', симметричная точке B относительно прямой O_1O_2, будет второй точкой пересечения окружностей.

Покажем, что окружности не имеют других точек пересечения, кроме B и B'. Допустим, что B'' — третья точка пересечения. Пусть для определенности она лежит в той же полуплоскости относительно прямой O_1O_2, что и точка B. Треугольники O_1BO_2 и $O_1B''O_2$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства углов O_2O_1B и O_2O_1B'' следует, что полупрямая O_1B совпадает с полупрямой O_1B''. После этого из равенства отрезков $O_1B = O_1B'' = R_1$ следует, что точки B'' и B совпадают. Утверждение доказано.

Задача 13.6. *Дан треугольник ABC. Выразить медиану, биссектрису и высоту треугольника, проведенные из вершины C, через стороны треугольника.*

Решение. Начнем с медианы треугольника (рис. 125). Пусть O — основание медианы. Построим точку D, симметричную точке C относительно точки O, $OD = OC$.

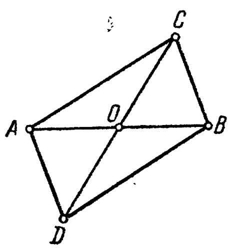

Рис. 125.

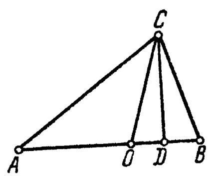

Рис. 126.

Применяя теорему 13.4 к параллелограмму $ABCD$, получим

$$AB^2 + (2OC)^2 = 2AC^2 + 2BC^2.$$

Отсюда находим медиану OC.

Найдем биссектрису угла C (рис. 126). Согласно теореме 11.6 точка O — основание биссектрисы — делит сторону AB на отрезки, пропорциональные сторонам AC и BC. Это позволяет, зная AB, AC и BC, найти AO и OB. Допустим, они уже найдены. Применяя теорему 13.2 или 13.3 к треугольникам ABC и AOC, получим

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \pm 2AB \cdot AD,$$
$$OC^2 = AC^2 + AO^2 \pm 2AO \cdot AD.$$

Умножая первое равенство на AO, а второе на AB и вычитая их почленно, получим уравнение, содержащее только одно неизвестное OC — биссектрису угла C. Из этого уравнения и находится биссектриса.

Найдем высоту CD (рис. 126). Прежде всего по теореме 13.2 или 13.3 находим отрезок AD. Затем из прямоугольного треугольника ACD находим высоту CD.

Проведем полуокружность с радиусом, равным единице (рис. 127). Возьмем на полуокружности произвольную точку A и обозначим через α угол AOB. Опустим из точки A

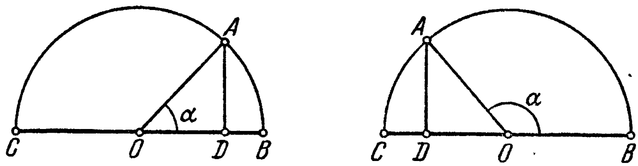

Рис. 127.

перпендикуляр AD на диаметр BC. *Синусом* угла α называется длина отрезка AD. Синус угла α обозначается так: $\sin \alpha$. По определению считаем $\sin 0° = 0$, $\sin 180° = 0$.

Определим теперь понятие *косинуса* угла. Косинус угла α обозначается так: $\cos \alpha$. Если угол α острый, то $\cos \alpha$ равен отрезку OD (рис. 127, слева). Если угол α тупой, то $\cos \alpha$ есть отрицательное число, по абсолютной величине равное длине отрезка OD (рис. 127, справа). По определению считаем $\cos 0° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Тангенсом угла α называется отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$, т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Тангенс угла α не определен для $\alpha = 90°$.

Теорема 13.7. *Если угол α острый, то*

$$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha, \ \cos(90° - \alpha) = \sin \alpha, \ \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Доказательство (рис. 128). Пусть угол AOB равен α, а угол A_1OB равен $90° - \alpha$. Прямоугольные треугольники ODA и A_1D_1O равны, так как у них гипотенузы равны, как радиусы, а углы AOD и OA_1D_1 равны α. Из равенства этих треугольников следует, что $A_1D_1 = OD$, $OD_1 = AD$, т. е. $\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$.

Третья формула получается почленным делением первой на вторую. Теорема доказана.

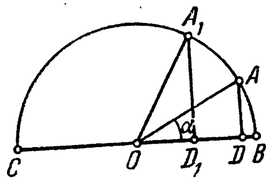

Рис. 128.

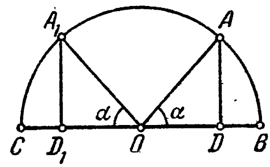

Рис. 129.

Теорема 13.8. *Для любого угла* α

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если $\alpha = 90°$. Пусть угол AOB равен α, а угол A_1OB равен $180° - \alpha$ (рис. 129). Из равенства треугольника OAD и OA_1D_1 следует, что $AD = A_1D_1$, т. е. $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. Если α не равно 90°, то один из углов α, $180° - \alpha$ острый, а другой — тупой. Поэтому $\cos\alpha$ и $\cos(180° - \alpha)$ имеют противоположные знаки. Так как $OD = OD_1$, то $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Теорема доказана.

Теорема 13.9. *Для любого* α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Доказательство. При $\alpha = 0°$, 90°, 180° утверждение теоремы проверяется подстановкой соответствующих значений синуса и косинуса. Если α — острый угол, то утверждение теоремы следует из теоремы Пифагора в применении ее к треугольнику OAD (рис. 129). Если угол α тупой, то утверждение теоремы также следует из теоремы Пифагора в применении ее к треугольнику OA_1D_1 (рис. 129). Теорема доказана.

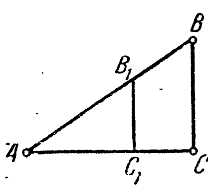

Рис. 130.

Теорема 13.10. *В прямоугольном треугольнике* ABC *с прямым углом* C

$$BC = AB\sin A,$$

$$AC = AB\cos A, \quad BC = AC\,\mathrm{tg}\,A.$$

Доказательство (рис. 130). Отложим на полупрямой AB отрезок AB_1, равный единице, и опустим перпендикуляр из точки B_1 на прямую AC. По определению синуса и косинуса $\sin A = B_1C_1$, $\cos A = AC_1$. Треугольники AB_1C_1 и ABC подобны, так как у них угол A общий, а углы C и C_1 прямые. Отсюда следует, что

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{1}, \quad \frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{1}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1}.$$

Подставляя сюда $B_1C_1 = \sin A$, $AC_1 = \cos A$, получим

$$BC = AB \sin A, \quad AC = AB \cos A, \quad BC = AC \operatorname{tg} A.$$

Теорема доказана.

Теорема 13.11.

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} 45° = 1;$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Доказательство. Построим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и углом A, равным 45° (рис. 131). У этого треугольника угол B будет также 45°.

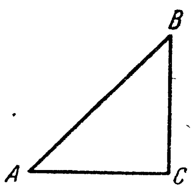

Рис. 131.

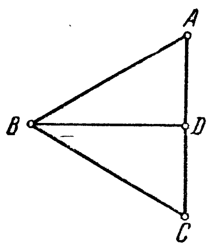

Рис. 132.

Следовательно, треугольник равнобедренный: $AC = BC$. Применяя к нему теорему Пифагора, получим

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2BC^2 = 2AC^2.$$

Отсюда $\sin^2 45° = \frac{1}{2}$, $\cos^2 45° = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Построим теперь равносторонний треугольник ABC (рис. 132). У него все углы равны, следовательно, каждый из них равен 60°. Проведем медиану BD треугольника. Она является биссектрисой и высотой. Поэтому в треугольнике ABD угол ADB прямой, а угол ABD равен 30°.

Так как $AD=\frac{1}{2}AC$, то $\sin 30°=\frac{1}{2}$. По теореме 13.9 отсюда находим $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. После этого $\operatorname{tg} 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Теорема доказана.

Теоремы 13.7 и 13.8 позволяют найти синусы, косинусы и тангенсы ряда других углов: 60°, 120°, 135°, 150°. Читателю предлагается проделать это в качестве упражнения.

Для синусов, косинусов и тангенсов острых углов составлены специальные таблицы. Эти таблицы позволяют по данному углу найти соответствующий ему синус, косинус или тангенс, а также по заданному синусу, косинусу или тангенсу найти соответствующий угол. Теорема 13.10 позволяет с помощью таблиц найти все элементы прямоугольного треугольника, т. е. его углы и стороны, если известны два катета, гипотенуза и катет, острый угол и гипотенуза или острый угол и катет.

Теорема 13.12 (теорема косинусов). *В любом треугольнике ABC*

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C.$$

Доказательство. Если угол C равен 90°, то утверждение теоремы следует из теоремы Пифагора, так как $\cos 90°=0$. Пусть C — острый угол (см. рис. 122). Тогда по теореме 13.3

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot CD.$$

По теореме 13.10 в применении к треугольнику ACD $CD=AC\cdot\cos C$. Поэтому

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C.$$

Пусть теперь C — тупой угол (см. рис. 121). По теореме 13.2

$$AB^2=AC^2+BC^2+2BC\cdot CD.$$

По теореме 13.10 в применении к треугольнику ADC $CD=AC\cos(\angle ACD)$. Но угол ACD дополняет угол C треугольника ABC до 180°. Поэтому, по теореме 13.8, $\cos(\angle ACD)=-\cos C$ и, следовательно, $AC\cdot\cos C=-CD$. Таким образом, и в случае тупого угла

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C.$$

Теорема доказана.

Теорема 13.13 (теорема синусов). *В любом треугольнике* ABC

$$\frac{\sin A}{BC}=\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin C}{AB}.$$

Доказательство. Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 133). Пусть B_1 и C_1 — точки окружности, диаметрально противоположные вершинам B и C треугольника. Треугольник BCB_1 прямоугольный, так как вписанный угол C опирается на диаметр. Поэтому $BC=2R\sin B_1$. Угол B_1 равен углу A треугольника ABC, так как они опираются на одну и ту же дугу окружности. Поэтому $BC=2R\sin A$.

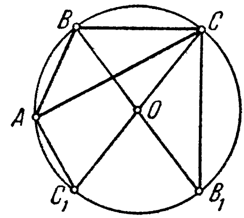

Рис. 133.

Рассмотрим треугольник C_1CA. Он тоже прямоугольный. $AC=2R\sin C_1$. Угол C_1 и угол B треугольника ABC опираются на дополнительные дуги. Поэтому эти углы дополняют друг друга до $180°$. По теореме 13.8 $\sin C_1=\sin B$. Таким образом, $AC=2R\sin B$.

Аналогично доказывается, что $AB=2R\sin C$. Сопоставляя полученные три формулы, заключаем, что

$$\frac{\sin A}{BC}=\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin C}{AB}=\frac{1}{2R}.$$

Теорема доказана.

Теоремы 13.12 и 13.13 позволяют найти все элементы треугольника, т. е. его углы и стороны, если заданы три элемента, однозначно определяющие треугольник. Такими тремя элементами являются: три стороны треугольника, две стороны и угол, заключенный между ними, сторона и два угла.

Упражнения

1. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Доказать, что угол треугольника, противолежащий стороне c, будет тупым, прямым или острым в зависимости от того, будет выражение $c^2-a^2-b^2$ положительным, равным нулю или отрицательным.

2. Пусть α и β — положительные числа, причем $\alpha>\beta$. Доказать, что треугольник со сторонами

$$\alpha^2+\beta^2,\quad \alpha^2-\beta^2,\quad 2\alpha\beta$$

является прямоугольным.

3. Доказать, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть окружность.

4. Доказать, что геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть прямая.

5. Найти следующее выражение для высоты h_c треугольника со сторонами a, b, c, опущенной на сторону c:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где p — *полупериметр*, т. е. $p = \frac{a+b+c}{2}$.

§ 14. ВЫПУКЛЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольником $A_1A_2 \dots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ (рис. 134). Точки $A_1, A_2, \dots$ $\dots, A_n$ называются ***вершинами*** многоугольника, а отрезки

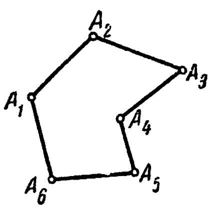

Рис. 134.

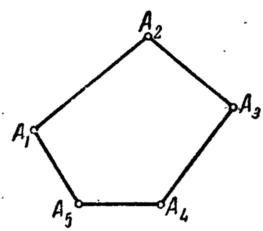

Рис. 135.

$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ называются его *сторонами*. Две вершины называются *соседними*, если они соединяются стороной многоугольника. У каждой вершины есть две соседние с ней вершины.

Каждая из прямых $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ разбивает плоскость на две полуплоскости. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ называется ***выпуклым***, если он располагается в одной полуплоскости относительно каждой из этих прямых, причем каждая прямая A_pA_{p+1} не имеет других общих точек с многоугольником, кроме точек отрезка A_pA_{p+1} (рис. 135).

Теорема 14.1. *Если концы ломаной $B_1B_2 \dots B_n$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой b, то ломаная пересекает прямую b.*

Доказательство. Допустим, ломаная не пересекается с прямой b. Тогда, следуя вдоль ломаной от вершины B_1 к B_n, мы встретим две соседние вершины, лежащие в разных полуплоскостях относительно прямой b. Звено ломаной, соединяющее эти вершины, пересекается с прямой b. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 14.2. *Если прямая имеет три общие точки с выпуклым многоугольником, то она содержит одну из его сторон.*

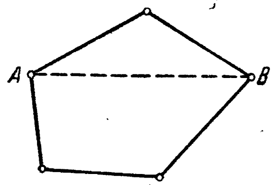

Рис. 136.

Доказательство. Пусть A, B, C — три точки прямой a, принадлежащие многоугольнику. Пусть для определенности точка B лежит между A и C. Точка B принадлежит одной из сторон многоугольника. Утверждаем, что эта сторона принадлежит прямой a. Действительно, в противном случае прямая, содержащая эту сторону, разделяет точки A и C. А это противоречит условию выпуклости многоугольника. Теорема доказана.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий две несоседние вершины (рис. 136, AB).

Теорема 14.3. *Диагональ A_1A_p разбивает выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_p \ldots A_n$ на два выпуклых многоугольника $A_1A_2 \ldots A_p$ и $A_pA_{p+1} \ldots A_nA_1$. Эти многоугольники лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_1A_p. Полупрямая A_1A_p проходит между полупрямыми A_1A_2 и A_1A_n.*

Доказательство. По теореме 14.2 прямая A_1A_p не имеет других общих точек с многоугольником, кроме точек A_1 и A_p. По теореме 14.1 ломаная $A_1A_2 \ldots A_p$ лежит по одну сторону от прямой A_1A_p. Так как исходный многоугольник лежит по одну сторону от каждой из прямых A_1A_2, A_2A_3 ..., то этим свойством обладает и многоугольник $A_1A_2 \ldots A_p$. Аналогично доказывается выпуклость многоугольника $A_p \ldots A_nA_1$.

Докажем, что эти многоугольники лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_1A_p.

Из трех полупрямых A_1A_2, A_1A_p и A_1A_n, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_2, либо полупрямая A_1A_p, либо полупрямая A_1A_n проходит между двумя другими. Это не может быть полупрямая A_1A_n, так как тогда точки A_p и A_2 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_1A_n, что противоречит выпуклости исходного многоугольника. Итак, полупрямая A_1A_p проходит между полупрямыми A_1A_2 и A_1A_n. А это значит, что прямая A_1A_p разделяет точки A_2 и A_n, следовательно, разделяет многоугольники $A_1A_2 \dots A_p$ и $A_p \dots A_nA_1$. Теорема доказана.

Пусть A — вершина выпуклого многоугольника и B, C — соседние с ней вершины. *Внутренним углом* многоугольника при вершине A называется угол между полупрямыми AB и AC. *Внешним углом* многоугольника при вершине A называется угол, смежный внутреннему.

Теорема 14.4. *Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна* $(n-2)\,180°$, *где* n — *число сторон или вершин многоугольника.*

Сумма внешних углов выпуклого многоугольника не зависит от n *и равна* $360°$.

Доказательство. Каждый треугольник является выпуклым, и для него теорема верна, так как $(3-2)\,180° = 180°$. Будем вести доказательство теоремы по индукции. Допустим, теорема верна для всех многоугольников с числом сторон, меньшим n. Докажем, что она верна для многоугольников с n сторонами.

Пусть P — многоугольник с n сторонами. Соединим две его несоседние вершины A и B диагональю AB. По теореме 14.3 мы получим два многоугольника P_1 и P_2 с числом сторон n_1 и n_2, причем $n_1 < n$, $n_2 < n$, $n_1 + n_2 = n + 2$. Так как диагональ AB проходит между соседними сторонами с общей вершиной A, то внутренний угол при вершине A многоугольника P равен сумме углов многоугольников P_1 и P_2 при вершине A. Аналогично угол при вершине B многоугольника P равен сумме углов многоугольников P_1 и P_2 при вершине B. Отсюда следует, что сумма углов многоугольника P равна сумме углов многоугольников P_1 и P_2, т. е. $(n_1-2)\,180° + (n_2-2)180° = (n-2)\,180°$. Первое утверждение теоремы доказано.

Так как внешний угол многоугольника является смежным соответствующему внутреннему углу, а сумма смежных углов равна $180°$, то сумма внешних углов многоугольника равна $180°\,n - (n-2)\,180°$, т. е. $360°$. Теорема доказана.

Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — выпуклый многоугольник. Каждая из прямых A_1A_2, $A_2A_3, \dots, A_nA_1$ разбивает плоскость на две полуплоскости. Отметим ту из них, которая содержит многоугольник. Мы будем говорить, что точка X *лежит внутри* многоугольника, если она принадлежит каждой из отмеченных полуплоскостей и не принадлежит многоугольнику. Часто многоугольником называют фигуру, которая состоит не только из сторон и вершин, но также из точек плоскости, лежащих внутри многоугольника. Чтобы различать их, мы будем называть многоугольник в этом смысле *пополненным многоугольником*. Сам многоугольник образует границу пополненного многоугольника. На рис. 137 пополненный многоугольник заштрихован.

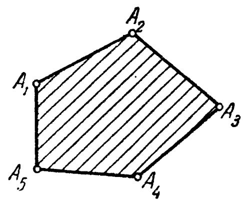

Рис. 137.

Пусть P_1 и P_2 — два выпуклых многоугольника, P_1' и P_2' — соответствующие им пополненные многоугольники. Мы будем говорить, что многоугольник P_1 расположен внутри многоугольника P_2, если каждая точка многоугольника P_1' принадлежит многоугольнику P_2'. *Периметром* многоугольника называется сумма длин его сторон.

Теорема 14.5. *Если выпуклый многоугольник P_1 содержится внутри выпуклого многоугольника P_2, то периметр P_1 не больше периметра P_2. Если многоугольник P_1 не совпадает с P_2, то его периметр меньше периметра P_2.*

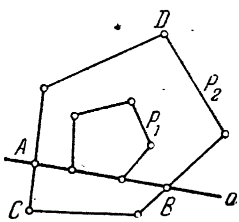

Рис. 138.

Доказательство. Проведем прямую a, содержащую какую-нибудь сторону многоугольника P_1 (рис. 138). Многоугольник P_1 расположен по одну сторону этой прямой. Многоугольник P_2 либо расположен по одну сторону прямой a, либо есть точки многоугольника P_2, лежащие по разные стороны от прямой a. Во втором случае прямая a пересекает многоугольник P_2 в двух точках: A и B. Действительно, пусть C и D — точки многоугольника P_2, лежащие по разные стороны от прямой a. Точки C и D разбивают многоугольник P_2 на две ломаные. Каждая из них пересекает прямую a (теорема 14.1).

Прямая a разбивает многоугольник P_2 на два многоугольника. Пусть Q_2 — тот из них, который лежит в одной полуплоскости с P_1 относительно прямой a. Многоугольник Q_2 содержит внутри многоугольник P_1 и имеет периметр меньший, чем периметр многоугольника P_2. Действительно, переход от многоугольника P_2 к Q_2 связан с заменой ломаной отрезком AB, соединяющим ее концы. Проделав такое построение с каждой стороной многоугольника P_1, мы получим, в конце концов, из многоугольника P_2 многоугольник P_1. Отсюда следует, что если многоугольник P_1 не совпадает с P_2, то он имеет периметр меньше периметра P_2. Теорема доказана.

Ломаная γ: $A_1 A_2 \ldots A_n$ называется *выпуклой*, если многоугольник P со сторонами $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ является выпуклым. Ломаная γ': $A_1A_2'A_3' \ldots A_n$ называется *объемлющей* для выпуклой ломаной $A_1 A_2 \ldots A_n$, если обе ломаные проходят в одной полуплоскости относительно прямой $A_1 A_n$ и ломаная γ' не содержит внутренних точек многоугольника P (рис. 139).

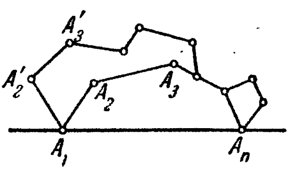

Рис. 139.

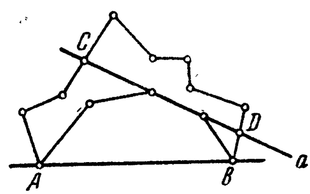

Рис. 140.

Теорема 14.6. *Ломаная γ', объемлющая выпуклую ломаную γ, имеет длину не меньшую, чем γ. Если ломаные не совпадают, то γ' имеет большую длину.*

Доказательство (рис. 140). Проведем через звено ломаной γ прямую a. Следуя вдоль ломаной γ' из ее начальной точки A в конечную точку B, отметим первую и последнюю точки ломаной γ', принадлежащие прямой a. Пусть это будут точки C и D. Заменим участок CD ломаной γ' прямолинейным отрезком CD. Полученная при этом ломаная также объемлет ломаную γ и имеет длину, не большую γ', причем заведомо меньшую, если у ломаной γ' есть точки по разные стороны от прямой a. Проделав эту операцию столько раз, сколько звеньев у ломаной γ, мы получим такую объемлющую ломаную γ_1, которая расположена целиком на γ. Утверждаем, что она совпадает с γ.

Пусть S — вершина ломаной γ. Покажем, что она принадлежит γ_1. Возьмем точку S_1 на отрезке AB, отличную от A и B. Точки A и B — концы ломаной γ_1 — лежат по разные стороны от прямой SS_1. Поэтому γ_1 пересекает прямую SS_1. Точка пересечения должна принадлежать γ, так как γ_1 лежит на γ. Но единственная точка γ, которая лежит на прямой SS_1, есть точка S. Итак, точка S принадлежит γ_1 и, следовательно, ломаные γ_1 и γ совпадают. Исходная ломаная γ' имеет длину, не меньшую γ_1. Если γ не совпадает с γ', то γ' имеет длину большую, чем γ. Теорема доказана.

Выпуклый многоугольник называется *вписанным* в окружность, если его вершины лежат на некоторой окружности (рис. 141, слева). Выпуклый многоугольник

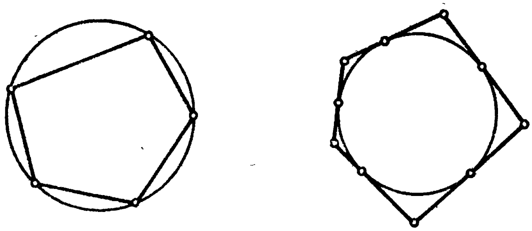

Рис. 141.

называется *описанным* около окружности, если его стороны касаются некоторой окружности (рис. 141, справа).

Теорема 14.7. *Пусть точки A_1, A_2, ..., A_n разбивают окружность на дуги $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, ..., $\overset{\frown}{A_nA_1}$ так, что любые две дуги не имеют других общих точек, кроме, может быть, концов. Тогда многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ выпуклый, вписанный в окружность.*

Доказательство. Точки A_p и A_{p+1} разбивают окружность на две дуги, одна из них $\overset{\frown}{A_pA_{p+1}}$. По условию теоремы на дуге $\overset{\frown}{A_pA_{p+1}}$ нет других точек A_1, ..., A_n, кроме A_p и A_{p+1}. Поэтому многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ расположен по одну сторону от прямой A_pA_{p+1} и, следовательно, выпуклый. Теорема доказана.

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны, все углы равны.

Теорема 14.8. *Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в некоторую окружность* *и описанным около некоторой окружности. Эти окружности концентричны, т. е. имеют общий центр.*

Доказательство. Пусть A_1, A_2, A_3 — три последовательные вершины правильного многоугольника. Проведем биссектрисы внутренних углов многоугольника в вершинах A_1 и A_2 (рис. 142). Они пересекаются в некоторой точке O. Треугольник A_1OA_2 равнобедренный, так как углы его A_1 и A_2 равны. Отсюда следует, что $OA_1 = OA_2$. Треугольники OA_2A_1 и OA_2A_3 равны, так как у них $OA_1 = OA_2$, $A_1A_2 = A_2A_3$, $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_3$. Отсюда следует,

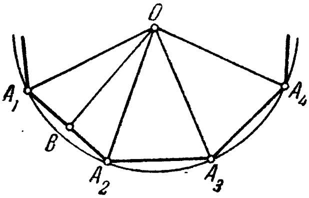

Рис. 142.

что $OA_2 = OA_3$. Аналогично доказываем, что $OA_3 = OA_4$ и т. д. Из равенства всех отрезков OA_1, OA_2, OA_3, ... следует, что окружность с центром O и радиусом OA_1 проходит через все вершины многоугольника. Окружность с центром O и радиусом, равным высоте OB треугольника OA_1A_2, касается всех сторон многоугольника. Теорема доказана.

Теорема 14.9. *Прямые, проходящие через средины сторон правильного многоугольника перпендикулярно этим сторонам, и биссектрисы внутренних углов правильного многоугольника являются осями симметрии. Если у правильного многоугольника четное число сторон, то он имеет центр симметрии. Центр симметрии совпадает с центром вписанной и описанной окружностей.*

Теорема 14.10. *Периметры правильных многоугольников с одинаковым числом сторон относятся, как стороны или как радиусы вписанных или описанных окружностей.*

Доказательство этих теорем предоставляется читателю в качестве упражнения.

Найдем стороны некоторых правильных многоугольников, вписанных в окружность радиуса R. Начнем с шестиугольника. Сумма его внутренних углов равна $(6-2)\,180° = 4 \cdot 180°$, поэтому каждый угол равен 120°. Углы при вершинах A_1 и A_2 в треугольнике OA_1A_2 (рис. 142) равны по 60°. Треугольник — равносторонний. Поэтому у правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, сторона равна радиусу R.

В случае правильного четырехугольника, вписанного в окружность, внутренние углы равны 90°, т. е. четырехугольник — квадрат. В треугольнике OA_1A_2 (рис. 142) углы, прилежащие стороне A_1A_2, равны по 45°. Поэтому $A_1A_2 = 2OA_1\cos 45° = R\sqrt{2}$.

В случае правильного треугольника, вписанного в окружность, углы, прилежащие к стороне A_1A_2, равны 30°. Соответственно получается $A_1A_2 = 2OA_1\cos 30° = R\sqrt{3}$.

Упражнения

1. Доказать теорему 14.9.
2. Выпуклый многоугольник с равными сторонами, вписанный в окружность — правильный.
3. Если у описанного выпуклого многоугольника число сторон нечетное и стороны равны, то он правильный. Если число сторон четное, то он может не быть правильным, например ромб.
4. Установить связь между радиусом окружности и сторонами правильного вписанного и описанного многоугольников с одинаковым числом сторон.
5. Выразить сторону правильного вписанного $2n$-угольника через сторону правильного вписанного n-угольника.
6. Найти сторону правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R. Воспользоваться упражнением 8 к § 11.

§ 15. ПЛОЩАДИ ФИГУР

Пусть F — произвольная фигура (рис. 143). Проведем две перпендикулярные прямые так, чтобы фигура F располагалась по одну сторону от каждой из этих прямых. Точкой пересечения O каждая из этих прямых разбивается на две полупрямые. Полупрямые a и b этих прямых образуют прямой угол, содержащий фигуру F.

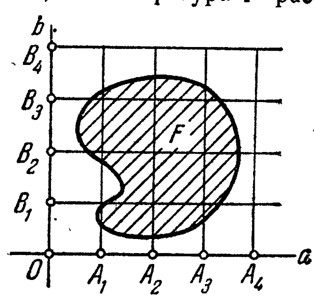

Рис. 143.

Отложим на полупрямых a и b от точки O отрезки, равные 1 *см*, 2 *см*, 3 *см*, ... Концы этих отрезков обозначим $A_1, A_2, A_3, \ldots; B_1, B_2, B_3, \ldots$ Проведем через точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$ прямые $a_1, a_2, a_3, \ldots$, параллельные b, а через точки $B_1, B_2, B_3, \ldots$ проведем прямые $b_1, b_2, b_3, \ldots$, параллельные a. Эти прямые разбивают наш угол на равные квадраты со стороной 1 *см*.

Обозначим через N_0 — число тех квадратов, которые целиком содержатся в фигуре F, а через N'_0 — число тех квадратов, которые имеют хотя бы одну точку фигуры F. Очевидно, $N_0 \leqslant N'_0$.

С помощью аналогичного построения разобьем прямой угол на квадраты со стороной 1 *мм* $= 0{,}1$ *см* и определим снова два числа N_1 и N'_1. N_1 — это число квадратов, целиком содержащихся в фигуре F, а N'_1 — число квадратов, содержащих хотя бы одну точку фигуры. Затем определяем два числа N_2 и N'_2 с помощью разбиения на квадраты со стороной 0,01 *см* и так далее.

Рассмотрим теперь две последовательности чисел:

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,$$
$$S'_0,\ S'_1,\ S'_2,\ \ldots,$$

где

$$S_0 = N_0, \quad S_1 = 0{,}01 \cdot N_1, \quad S_2 = 0{,}0001 \cdot N_2,\ \ldots,$$
$$S'_0 = N'_0, \quad S'_1 = 0{,}01 \cdot N'_1, \quad S'_2 = 0{,}0001 \cdot N'_2,\ \ldots$$

Вообще

$$S_k = (0{,}1)^{2k} \cdot N_k, \quad S'_k = (0{,}1)^{2k} \cdot N'_k.$$

Эти последовательности чисел обладают следующими очевидными свойствами:

1) $S_0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots,$

2) $S'_0 \geqslant S'_1 \geqslant S'_2 \geqslant \ldots,$

3) $S_0 \leqslant S'_0,\ S_1 \leqslant S'_1,\ S_2 \leqslant S'_2,\ \ldots$

Мы будем говорить, что *фигура F имеет определенную площадь, если разность $S'_n - S_n$ сколь угодно мала при достаточно большом n*. Это значит, что, каково бы ни было задано положительное число ε, всегда можно указать такое число n_0, что при $n > n_0$

$$S'_n - S_n < \varepsilon.$$

Площадью фигуры F мы будем называть число S, не меньшее любого S_n и не большее любого S'_n. Существование такого числа обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 15.1. *Пусть две последовательности чисел $S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots;\ S'_0,\ S'_1,\ S'_2,\ \ldots$ обладают следующими четырьмя свойствами:*

1) $S_0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots,$

2) $S'_0 \geqslant S'_1 \geqslant S'_2 \geqslant \ldots,$

3) $S'_0 \geqslant S_0,\ S'_1 \geqslant S_1,\ \ldots,$

4) *разность* $S'_n - S_n$ *сколь угодно мала при достаточно большом* n.

Тогда существует и притом только одно число S, *не меньшее любого из чисел* S_n *и не большее любого из чисел* S'_n.

Эту теорему мы примем без доказательства.

Фигуру F мы будем называть *простой*, если ее можно разбить на конечное число треугольников.

Теорема 15.2. *Простая фигура имеет определенную площадь. Площадь простой фигуры равна сумме площадей треугольников, из которых она составлена.*

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями, которые были введены при определении понятия площади фигуры. Оценим, насколько отличаются числа N_k и N'_k. Так как фигура простая, то она составлена из конечного числа треугольников. Если некоторый квадрат входит в N'_k и не входит в N_k, то он пересекает сторону одного из треугольников.

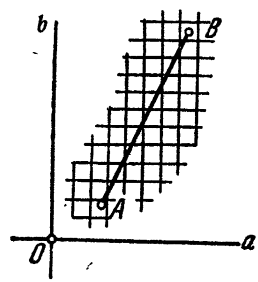

Рис. 144.

Оценим число квадратов со стороной $(0,1)^k$, которые пересекают отрезок AB длины l. Прямая AB образует с одной из полупрямых a или b угол, не больший $45°$ (рис. 144). Пусть для определенности этой полупрямой является b. Тогда между двумя горизонтальными прямыми разбиения плоскости на квадраты со стороной $(0,1)^k$ будет не более двух квадратов, пересекающих отрезок AB. Общее число квадратов, пересекающих отрезок AB, будет не больше $2\left(\frac{l}{(0,1)^k}+1\right)$.

Если фигура F состоит из m треугольников и наибольшая сторона у этих треугольников равна L, то число квадратов, на которые отличаются числа N_k и N'_k, не больше

$$6m\left(\frac{L}{(0,1)^k}+1\right)=6m(10^kL+1).$$

Соответственно числа S_k и S'_k отличаются не более чем на $6m((0,1)^kL+(0,1)^{2k})$, т. е. сколь угодно мало, если велико k. Отсюда мы заключаем, что простая фигура действительно имеет площадь.

Покажем теперь, что площадь простой фигуры F равна сумме площадей треугольников, из которых она составлена. Пусть $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots, \Delta^{(m)}$ — треугольники, из которых составлена фигура F. Обозначим через S площадь фигуры F, а через $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(m)}$ — площади треугольников. Обозначим через $N_k^{(i)}$ число квадратов, содержащихся в треугольнике $\Delta^{(i)}$. Если некоторый квадрат содержится в треугольнике $\Delta^{(i)}$, то он содержится и в фигуре F. Отсюда следует, что

$$N_k^{(1)}+N_k^{(2)}+\ldots+N_k^{(m)} \leqslant N_k.$$

Если некоторый квадрат содержится в фигуре F, но не содержится ни в одном треугольнике, то он пересекается со стороной одного из треугольников. Отсюда следует, что

$$N_k-\left(N_k^{(1)}+N_k^{(2)}+\ldots+N_k^{(m)}\right) \leqslant 6m(10^kL+1).$$

Соответственно

$$S_k-\left(S_k^{(1)}+S_k^{(2)}+\ldots+S_k^{(m)}\right) \leqslant 6m\left((0,1)^kL+(0,1)^{2k}\right).$$

Правая часть этого неравенства сколь угодно мала, если достаточно велико k.

При достаточно большом k число S_k сколь угодно мало отличается от S, числа $S_k^{(i)}$ сколь угодно мало отличаются от $S^{(i)}$. Так как S_k сколь угодно мало отличается от суммы величин $S_k^{(i)}$, то отсюда следует, что числа S и $S^{(1)}+S^{(2)}+\ldots+S^{(m)}$ отличаются сколь угодно мало. Но это значит, что они равны. Таким образом, площадь фигуры F равна сумме площадей $S^{(i)}$ треугольников $\Delta^{(i)}$, из которых составлена фигура F. Теорема доказана.

Теорема 15.3. *Площадь треугольника равна половине произведения стороны треугольника на высоту, опущенную из противоположной вершины.*

Доказательство. Определяя площадь фигуры F, мы взяли две перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O (см. рис. 143). Отправляясь от этих прямых, мы построили сетку квадратов, с помощью которой определили числа S_k, S'_k и, в конце концов, площадь фигуры. Естественно возникает вопрос: получим ли мы ту же площадь, если возьмем другую пару прямых, пересекающихся в другой точке $\bar{O}$? Рассмотрим тот случай, когда новые прямые параллельны старым. Будем называть прямые, с помощью которых строится сетка квадратов, базисными прямыми, а точку, в которой они пересекаются, базисной точкой.

Пусть число N_k относится к старой сетке, а $\overline{N}_k$ — к новой сетке. Так как квадраты имеют сторону $(0,1)^k$, то старую сетку можно совместить с новой сдвигом (параллельным переносом) на расстояния, не большие $(0,1)^k$ по направлениям базисных прямых. При таком сдвиге сетки некоторые квадраты из N_k, содержащиеся в фигуре F, могут уже не принадлежать фигуре, но заведомо содержат хотя бы одну ее точку. Число таких квадратов, как мы знаем, не больше $6m(10^k L+1)$, поэтому $\overline{N}_k \geqslant N_k - 6m(10^k L+1)$. Аналогично заключаем, что $N_k \geqslant \overline{N}_k - 6m(10^k L+1)$. Соответственно для чисел S_k и $\overline{S}_k$ получаются неравенства

$$\overline{S}_k \geqslant S_k - 6m\left((0,1)^k L + (0,1)^{2k}\right),$$

$$S_k \geqslant \overline{S}_k - 6m\left((0,1)^k L + (0,1)^{2k}\right).$$

Из этих неравенств видно, что $\overline{S}_k$ и S_k отличаются сколь угодно мало при достаточно большом k.

Пусть $\overline{S}$ — площадь фигуры F, которая получается, если исходить из новых базисных прямых, пересекающихся в точке $\overline{O}$. Так как S_k сколь угодно мало отличается от S при достаточно большом k, а $\overline{S}_k$ сколь угодно мало отличается от $\overline{S}$, то S и $\overline{S}$ отличаются сколь угодно мало. Но S и $\overline{S}$ — вполне определенные числа и могут отличаться сколь угодно мало только тогда, если они равны. Итак, площадь фигуры F не зависит от выбора базисной точки $\overline{O}$ при заданном направлении базисных прямых.

Докажем теперь, что площадь прямоугольника со сторонами p и q, параллельными базисным прямым, равна произведению p на q. Число квадратов со стороной $(0,1)^k$, содержащихся внутри прямоугольника, будет, очевидно, не меньше

$$\left(\frac{p}{(0,1)^k} - 1\right)\left(\frac{q}{(0,1)^k} - 1\right).$$

Число квадратов, содержащих по крайней мере одну точку прямоугольника, будет не больше

$$\left(\frac{p}{(0,1)^k}+1\right)\left(\frac{q}{(0,1)^k}+1\right).$$

Поэтому

$$S_k \geqslant pq-(p+q)(0,1)^k+(0,1)^{2k},$$
$$S_k' \leqslant pq+(p+q)(0,1)^k+(0,1)^{2k}.$$

Так как площадь S прямоугольника не меньше любого S_k и не больше любого S_k', то S может быть равно только pq.

Найдем теперь площадь треугольника. Прежде всего заметим, что если фигура F' получается из F параллельным переносом или симметрией относительно точки, то они имеют одинаковую площадь. Пусть, например, F и F' симметричны относительно точки O. Приняв эту точку за базисную, мы получим для обеих фигур одинаковые числа N_k и N_k', а следовательно, одинаковые площади. Если фигура F' получается сдвигом фигуры F, то надо взять базисные точки в соответствующих точках фигур.

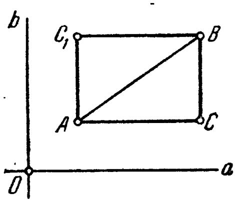

Рис. 145.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с катетами, параллельными базисным прямым (рис. 145). По симметрии относительно средины отрезка AB дополним его до прямоугольника. Площади треугольников ABC и ABC_1 равны ввиду указанной симметрии. Площадь прямоугольника по доказанному равна $AC \cdot BC$. Поэтому площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AC \cdot BC$.

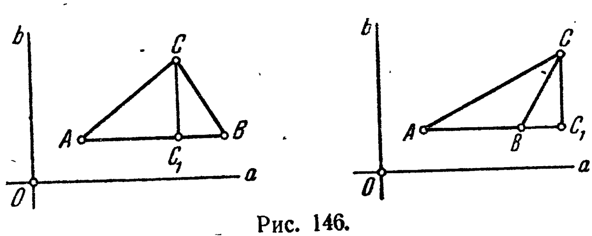

Рис. 146.

Пусть теперь у треугольника ABC только одна сторона параллельна базисной прямой, например, сторона AB

параллельна a. Рассмотрим сначала случай, когда углы A и B острые (рис. 146, слева). Имеем

$$S(\triangle ABC)=S(\triangle ACC_1)+S(\triangle BCC_1)=$$
$$=\frac{1}{2}AC_1\cdot CC_1+\frac{1}{2}BC_1\cdot CC_1=\frac{1}{2}AB\cdot CC_1,$$

т. е. площадь треугольника ABC равна половине произведения стороны AB на высоту CC_1.

Допустим, угол B треугольника ABC тупой (рис. 146, справа). Тогда

$$S(\triangle ACC_1)=S(\triangle ABC)+S(\triangle CBC_1),$$
$$\frac{1}{2}AC_1\cdot CC_1=S(\triangle ABC)+\frac{1}{2}BC_1\cdot CC_1.$$

Отсюда

$$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}AB\cdot CC_1.$$

Пусть, наконец, ни одна сторона треугольника ABC не параллельна базисным прямым (рис. 147). Проведем прямую BD, параллельную a, пересекающую сторону AC в точке D. По доказанному площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABD и BDC, т. е. $S(\triangle ABC)=$

$$=\frac{1}{2}BD\cdot AE+\frac{1}{2}BD\cdot CF=$$
$$=\frac{1}{2}BD\cdot(AE+CF).$$

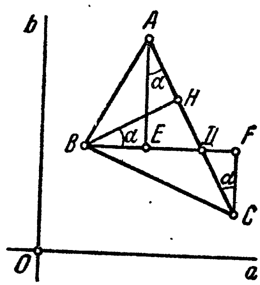

Рис. 147.

Имеем $AE=AD\cos\alpha$, $CF=CD\cos\alpha$, $AE+CF=AC\cos\alpha$, $BH=BD\cos\alpha$. Поэтому площадь треугольника

$$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}AC\cdot BH.$$

Итак, мы доказали, что площадь треугольника равна половине произведения стороны треугольника на высоту, опущенную на эту сторону. Выбор стороны был связан с расположением треугольника относительно базисных прямых. Покажем, что результат не изменится, если взять любую другую сторону и опущенную на нее высоту. Пусть ABC — данный треугольник. Опустим высоты из вершин B и C (рис. 148). Из подобия треугольников ABB_1 и ACC_1 следует, что

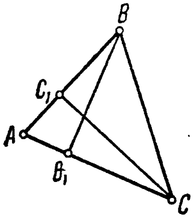

Рис. 148.

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CC_1}{BB_1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}AC\cdot BB_1=\frac{1}{2}AB\cdot CC_1.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 15.4. *Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту* (рис. 149).

Доказательство. Треугольники ABD и ADC имеют равные стороны AB и CD и равные соответствующие им высоты. Поэтому площадь параллелограмма $ABDC$ равна $AB\cdot CE$.

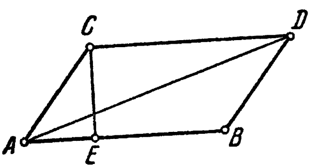

Рис. 149.

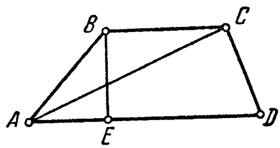

Рис. 150.

Теорема 15.5. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 150). Ее площадь равна сумме площадей треугольников ABC и ACD, т. е. равна

$$\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BE.$$

Теорема 15.6. *Площади равных фигур равны. Площади подобных фигур относятся, как квадраты соответствующих линейных размеров.*

Доказательство. Мы ограничимся случаем простых фигур. В этом случае утверждение теоремы сводится к вопросу о соотношении площадей равных или соответственно подобных треугольников. У равных треугольников соответствующие стороны и высоты равны. Поэтому равны и площади. Если треугольники подобны, то их соответствующие высоты относятся, как стороны. Поэтому их площади относятся, как квадраты соответствующих линейных размеров. Теорема доказана.

Упражнения

1. Вывести следующую формулу для площади треугольника со сторонами a, b, c:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника (*формула Герона*).

2. Доказать, что площадь треугольника равна половине произведения двух сторон треугольника на синус угла, заключенного между этими сторонами.

3. Доказать, что выпуклый многоугольник является простой фигурой, т. е. может быть разбит на конечное число треугольников.

4. Доказать, что площадь выпуклого многоугольника, описанного около окружности, равна полупериметру многоугольника, умноженному на радиус описанного круга.

§ 16. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА

Длиной окружности называется число L, обладающее следующими двумя свойствами:

1. L не меньше периметра любого вписанного в эту окружность выпуклого многоугольника.

2. Существуют вписанные выпуклые многоугольники, периметры которых сколь угодно мало отличаются от L.

Эти свойства числа L выражают словами: L есть *точная верхняя грань* периметров выпуклых многоугольников, вписанных в окружность.

Теорема 16.1. *Периметр любого вписанного в окружность выпуклого многоугольника меньше периметра любого описанного выпуклого многоугольника.*

Если стороны вписанного и описанного выпуклых многоугольников не больше a и $a<\frac{R}{2}$, где R — радиус окружности, то периметры их отличаются не более чем на $32a$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно, так как любой вписанный выпуклый многоугольник содержится внутри любого описанного и поэтому имеет меньший периметр. Докажем второе утверждение.

Пусть P — вписанный, а P' — описанный многоугольники, p и p' — их периметры. Так как стороны многоугольников не больше a, то многоугольник P лежит вне окружности радиуса $R-a$, а многоугольник P' лежит внутри окружности радиуса $R+a$. Подвергнем многоугольник P преобразованию гомотетии с коэффициентом гомотетии, равным $\frac{R+a}{R-a}$. Тогда он перейдет в многоугольник P_1. Многоугольник P' содержится внутри многоугольника P_1. Поэтому его периметр меньше, чем периметр многоугольника P_1, т. е.

$$p' < \frac{R+a}{R-a} p.$$

Отсюда получаем

$$(R-a)(p'-p) < 2ap.$$

Периметр многоугольника P меньше периметра квадрата, описанного около окружности, т. е. $p < 8R$. По условию теоремы $a < \frac{R}{2}$, следовательно, $R-a > \frac{R}{2}$. Поэтому $\frac{R}{2}(p'-p) < 2a \cdot 8R$, или

$$p'-p < 32a.$$

Теорема доказана.

Теорема 16.2. *Для данного вписанного многоугольника можно указать такое положительное число ε, что любой описанный многоугольник имеет периметр, больший периметра данного вписанного многоугольника по крайней мере на ε.*

Для данного описанного многоугольника можно указать такое положительное число ε, что любой вписанный многоугольник имеет периметр, меньший периметра данного описанного многоугольника по крайней мере на ε.

Доказательство. Пусть P — данный вписанный многоугольник, A и B — две его смежные вершины (рис. 151, слева). Возьмем точку C на дуге AB и обозначим через P_1 многоугольник, вершинами которого являются вершины многоугольника P и точка C. Периметр многоугольника P_1 больше периметра многоугольника P. Пусть разность их периметров ε. Периметр любого описанного многоугольника больше периметра многоугольника P_1, следовательно, больше периметра многоугольника P по крайней мере на ε.

Пусть P' — данный описанный многоугольник (рис. 151, справа). Возьмем какую-нибудь точку на окружности, отличную от точек касания многоугольника с окружностью. Проведем в этой точке касательную. Она разбивает многоугольник на два многоугольника. Тот из них, который лежит по одну сторону с окружностью, является описанным около окружности, обозначим его P_1'. Периметр многоугольника P_1' меньше периметра многоугольника P'.

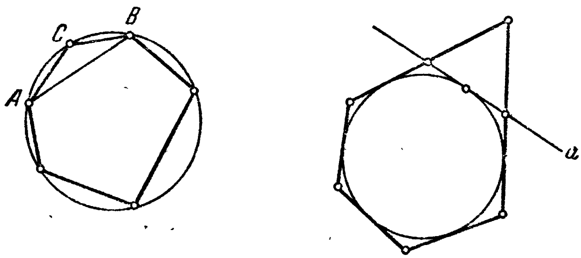

Рис. 151.

Пусть ε разность их периметров. Любой вписанный многоугольник имеет периметр, меньший периметра многоугольника P_1'. Поэтому периметр многоугольника P' по крайней мере на ε больше периметра любого вписанного многоугольника. Теорема доказана.

Теорема 16.3. *Каждая окружность имеет определенную длину. Длина окружности равна $2\pi R$, где 2π — некоторое число, не зависящее от взятой окружности, а R — радиус окружности.*

Доказательство. Пусть P_n и P_n' — вписанный и описанный правильные многоугольники с числом сторон 2^n. Обозначим их периметры p_n и p_n'. Так как каждый из многоугольников P_n и P_n' содержится внутри квадрата, описанного около окружности, то стороны этих многоугольников не больше $\frac{8R}{2^n}$. Поэтому их периметры отличаются не более чем на $\frac{32 \cdot 8R}{2^n}$ (теорема 16.1).

Периметр многоугольника P_n меньше периметра многоугольника P_{n+1}, так как переход от P_n к P_{n+1} связан с заменой стороны AB многоугольника P_n двумя сторонами AC и CB многоугольника P_{n+1} (рис. 152, слева).

Периметр многоугольника P'_n больше периметра многоугольника P'_{n+1}, так как переход от P'_n к P'_{n+1} связан с заменой ломаной ABC на ломаную AA_1C_1C, которая имеет меньшую длину (рис. 152, справа).

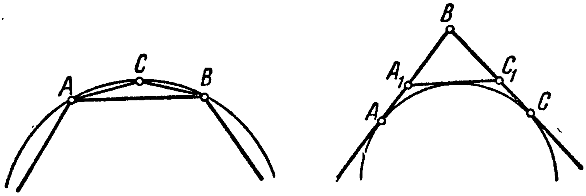

Рис. 152.

Таким образом, последовательности чисел p_n и p'_n обладают следующими свойствами:

1. $p_2 < p_3 < p_4 < \ldots$,
2. $p'_2 > p'_3 > p'_4 > \ldots$,
3. $p_n < p'_n$,
4. $p'_n - p_n < \frac{32 \cdot 8R}{2^n}$.

По теореме 15.1 существует число L, не меньшее любого из чисел p_n и не большее любого из чисел p'_n. Докажем, что число L и есть длина окружности, как мы ее определили вначале.

Так как $p'_n - p_n$ сколь угодно мало при достаточно большом n, а L заключено между p'_n и, p_n, то $L - p_n$ сколь угодно мало при достаточно большом n. Покажем, что периметр любого вписанного многоугольника меньше L. Пусть p — периметр данного вписанного многоугольника. По теореме 16.2 существует положительное число ε такое, что периметр любого описанного многоугольника больше p по крайней мере на ε. При достаточно большом n периметр p'_n сколь угодно мало отличается от L. Поэтому L больше p. Итак, существование длины окружности доказано. Докажем теперь, что она пропорциональна радиусу.

Подвергнем данную окружность и многоугольники P_n, P'_n преобразованию гомотетии с коэффициентом гомотетии $\frac{1}{R}$ относительно центра окружности. При этом данная окружность перейдет в окружность единичного радиуса.

Обозначим $\bar{p}_n$ и $\bar{p}'_n$ периметры 2^n-угольников, полученных этим преобразованием из многоугольников P_n и P'_n.

Имеем

$$\bar{p}_n = \frac{1}{R} p_n, \qquad \bar{p}'_n = \frac{1}{R} p'_n.$$

Обозначим через 2π длину единичной окружности. Тогда $\bar{p}_n < 2\pi < \bar{p}'_n$. Отсюда $p_n < 2\pi R < p'_n$. По теореме 15.1 существует одно число, не меньшее любого p_n и не большее любого p'_n. Поэтому $L = 2\pi R$. Теорема доказана.

Рис. 153.

Число π, которое входит в выражение длины окружности, иррациональное. Приблизительное значение

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

Длиной дуги $\widehat{AB}$ окружности называется точная верхняя грань вписанных выпуклых ломаных в эту дугу (рис. 153).

Т е о р е м а 16.4. *Любая дуга окружности имеет определенную длину. Длина дуги окружности*

$$l = \pi R \frac{\alpha}{180},$$

где α — градусная мера соответствующего центрального угла.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство существования длины дуги проводится так же, как доказательство существования длины окружности. При этом роль вписанных многоугольников играют вписанные ломаные, а роль описанных многоугольников играют описанные ломаные. Мы не будем повторять этих рассуждений. Докажем второе утверждение теоремы, предполагая первое утверждение доказанным.

Пусть $\widehat{AB}$ — дуга окружности и C — точка этой дуги. Она разбивает дугу $\widehat{AB}$ на две дуги: $\widehat{AC}$ и $\widehat{CB}$. Докажем сначала, что длина дуги $\widehat{AB}$ равна сумме длин дуг $\widehat{AC}$ и $\widehat{CB}$. Обозначим через l длину дуги $\widehat{AB}$, через l_1 — длину дуги $\widehat{AC}$ и через l_2 — длину дуги $\widehat{CB}$. Требуется доказать, что $l = l_1 + l_2$.

Возьмем произвольное положительное число ε. По определению длины дуги $\overset{\frown}{AB}$ существует ломаная γ, вписанная в дугу $\overset{\frown}{AB}$, длина которой отличается от длины дуги $\overset{\frown}{AB}$ меньше чем на ε. Точно так же существуют ломаные γ_1 и γ_2, вписанные в $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BC}$, такие, что их длины отличаются от l_1 и l_2 меньше чем на ε. Пополним ломаную γ вершинами ломаных γ_1 и γ_2, а ломаные γ_1 и γ_2 вершинами ломаной γ. Тогда получим ломаные γ', γ_1' и γ_2'. Так как пополнение ломаной новыми вершинами не уменьшает ее длины, то длины ломаных γ', γ_1' и γ_2' отличаются от l, l_1 и l_2 также не более чем на ε. Ломаная γ' составлена из ломаных γ_1' и γ_2'. Поэтому ее длина равна сумме длин ломаных γ_1' и γ_2'. Отсюда следует, что l отличается от l_1+l_2 не более чем на 2ε. Так как l и l_1+l_2 — совершенно определенные числа, а ε произвольно, то это может быть, только если $l=l_1+l_2$.

Из доказанного свойства длины дуги следует, что если некоторая дуга окружности является частью другой дуги, то первая дуга имеет меньшую длину. Очевидно, равные дуги имеют равные длины.

Пусть данная дуга отвечает центральному углу α°. Разобьем окружность на n равных дуг, взяв точку A дуги $\overset{\frown}{AB}$ за начальную точку деления окружности. Пусть m — целая часть $\frac{n\alpha}{360}$. Тогда на дуге $\overset{\frown}{AB}$ будет расположено m целых дуг деления окружности и одна, может быть, не целая дуга, если $\frac{n\alpha}{360}$ не является целым.

Одна дуга при делении окружности на n равных частей имеет длину $\frac{2\pi R}{n}$. Отсюда следует, что длина дуги $\overset{\frown}{AB}$, будем обозначать ее l, заключена в пределах

$$\frac{2\pi R}{n} m \leqslant l < \frac{2\pi R}{n}(m+1).$$

Так как

$$m \leqslant \frac{n\alpha}{360} < m+1,$$

то из предыдущего неравенства получаем

$$\frac{2\pi R}{n}\left(\frac{n\alpha}{360}-1\right) \leqslant l < \frac{2\pi R}{n}\left(\frac{n\alpha}{360}+1\right),$$

т. е.

$$\pi R\frac{\alpha}{180}-\frac{2\pi R}{n}\leqslant l<\pi R\frac{\alpha}{180}+\frac{2\pi R}{n}.$$

Так как n произвольно, то

$$l=\pi R\frac{\alpha}{180}.$$

Теорема доказана.

Радианной мерой центрального угла называется отношение длины дуги окружности, соответствующей этому углу, к радиусу окружности. Единицей радианной меры углов является *радиан*. Это угол, которому соответствует дуга, равная радиусу. Градусная мера одного радиана равна приблизительно 57,3°. Радианная мера прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$, радианная мера угла 180° равна π.

Кругом радиуса R с центром в точке O называется фигура, точками которой являются точки плоскости, удаленные от точки O на расстояние, не большее R. Окружность радиуса R с центром O является границей этого круга.

Теорема 16.5. *Круг имеет определенную площадь. Площадь S круга радиуса R равна произведению длины ограничивающей круг окружности на половину радиуса, т. е.*

$$S=\pi R^2.$$

Доказательство. Впишем в окружность круга и опишем около нее правильные 2^n-угольники P_n и P'_n. Обозначим их площади через A_n и A'_n соответственно. Так как P_n расположен внутри P'_n, то $A_n<A'_n$. Покажем, что A_n и A'_n отличаются сколь угодно мало, если достаточно велико n. Стороны многоугольников P_n и P'_n не более чем $\frac{8R}{2^n}$. Если P_n подвергнуть преобразованию гомотетии относительно центра круга с коэффициентом гомотетии

$$k=\frac{R+\frac{8R}{2^n}}{R-\frac{8R}{2^n}},$$

то, как мы знаем, получится многоугольник, содержащий внутри многоугольник P'. Отсюда следует, что

$$A'_n < k^2 A_n = A_n + \frac{\frac{16R}{2^n}\cdot 2R}{\left(R-\frac{8R}{2^n}\right)^2} A_n.$$

Так как A_n меньше площади квадрата, описанного около окружности, т. е. меньше $4R^2$, а при $n > 3$ имеем $R - \frac{8R}{2^n} \geqslant \frac{1}{2} R$, то из этого неравенства получаем

$$A'_n < A_n + \frac{16R\cdot 2R\cdot 16}{2^n}.$$

Итак, A'_n и A_n отличаются сколь угодно мало при достаточно большом n.

Определяя площадь произвольной фигуры F, мы ввели два числа N_k и N'_k и соответствующие им числа S_k и S'_k (см. начало § 15, стр. 108). N_k — это число квадратов сетки со стороной $(0,1)^k$, которые принадлежат фигуре целиком, а N'_k — число тех квадратов, которые содержат хотя бы одну точку этой фигуры. Пусть теперь фигура F есть наш круг. Обозначим через $\overline{N}_k$ число квадратов, содержащихся в пополненном многоугольнике P_n, а через $\overline{N}'_k$ обозначим число тех квадратов, которые содержат хотя бы одну точку пополненного многоугольника P'_n. Очевидно, $\overline{N}_k < N_k < N'_k < \overline{N}'_k$. Обозначим через $\overline{S}_k$, S_k, S'_k и $\overline{S}'_k$ числа, которые получаются из соответствующих N умножением на $(0{,}01)^k$. Тогда

$$\overline{S}_k < S_k < S'_k < \overline{S}'_k.$$

Как мы знаем, при достаточно большом k число $\overline{S}_k$ сколь угодно мало отличается от A_n, а число $\overline{S}'_k$ сколь угодно мало отличается от A'_n. Отсюда следует, что S_k сколь угодно мало отличается от S'_k, и, следовательно, круг имеет определенную площадь. Так как $\overline{S}_k$ и $\overline{S}'_k$ при достаточно большом k сколь угодно мало отличаются от площадей многоугольников P_n и P'_n, то и S сколь угодно мало от них отличается.

Площадь A'_n многоугольника P'_n равна $\frac{1}{2} p'_n R$. Так как p'_n сколь угодно мало отличается от длины окружности

$2\pi R$, то площадь круга S сколь угодно мало отличается от πR^2. Но это значит, что $S=\pi R^2$. Теорема доказана.

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла (рис. 154). Круговой сектор имеет определенную площадь. *Площадь кругового сектора равна*

$$S=\pi R^2 \frac{\alpha}{360},$$

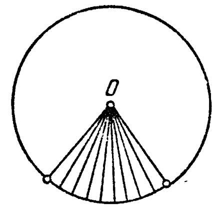

Рис. 154.

где R — радиус круга, а α — градусная мера соответствующего центрального угла. Доказательство существования площади сектора аналогично доказательству существования площади круга. Доказательство формулы для площади сектора аналогично доказательству формулы для длины дуги окружности.

Круговым сегментом называется общяя часть круга и полуплоскости (рис. 155). Сегмент имеет определенную

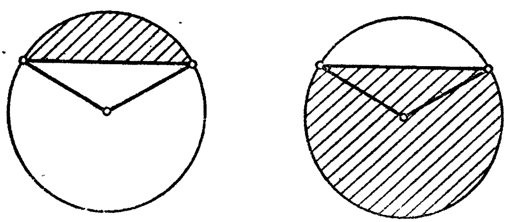

Рис. 155.

площадь. *Площадь сегмента*, не равного полукругу, определяется по формуле

$$S=\pi R^2 \frac{\alpha}{360} \mp S_{\Delta},$$

где S_{Δ} — площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак — надо брать в случае, если $\alpha < 180$, а знак $+$ в случае, если $\alpha > 180$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 15.2 о том, что площадь простой фигуры равна сумме площадей составляющих ее треугольников.

§ 17. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ ГЕОМЕТРИИ

Первые геометрические результаты относятся к глубокой древности и имеют опытное происхождение. Они были отмечены людьми в связи с их практической деятельностью. Геометрия как эмпирическая наука в ранний период достигла особенно высокого уровня в Египте в связи с землемерными и ирригационными работами.

В первом тысячелетии до нашей эры геометрические сведения от египтян перешли к грекам, в Греции начался новый этап развития геометрии. За период с VII по III век до нашей эры греческие геометры не только обогатили геометрию многочисленными новыми результатами, но предприняли также серьезные шаги к строгому ее обоснованию.

Многовековая работа греческих геометров за этот период была подытожена и систематизирована Евклидом (330—275 гг. до н. э.) в его знаменитом труде «Начала». Это сочинение дает первое дошедшее до нас строгое построение геометрии. В нем изложение настолько безупречно для своего времени, что в течение двух тысяч лет с момента появления «Начал» оно было единственным руководством для изучающих геометрию.

«Начала» Евклида состоят из тринадцати книг. Из них восемь книг посвящены собственно геометрии, а остальные — арифметике. Каждая книга «Начал» начинается определением понятий, которые встречаются. В первой книге «Начал» за определениями следуют постулаты и аксиомы. Например:

Постулат I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.

Постулат V. Требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиома I. Равные порознь третьему равны между собой.

Аксиома II. Если к равным прибавить равные, то получим равные.

И постулаты и аксиомы представляют собой утверждения, принимаемые без доказательства. По какому принципу одни утверждения относятся к постулатам, а другие — к аксиомам, неизвестно. В современном изложении мы все такие утверждения называем аксиомами.

Вслед за аксиомами идут теоремы и задачи на построение под общим названием «Предложения». Они расположены в строгой последовательности так, что доказательство (решение) каждого последующего предложения опирается на предыдущие.

В связи с таким построением геометрии возникло естественное желание у геометров свести число постулатов и аксиом, т. е. утверждений, принимаемых без доказательства, до минимума. Поэтому сам Евклид и многие геометры после Евклида пытались вывести некоторые постулаты и аксиомы из других постулатов и аксиом. В частности, многие геометры, начиная с Евклида, пытались доказать пятый постулат.

Было предложено много доказательств пятого постулата. Однако во всех этих доказательствах авторы использовали то или другое утверждение, не содержащееся в других постулатах и аксиомах, эквивалентное пятому постулату. Вот некоторые из таких утверждений:

1. Все перпендикуляры к одной стороне острого угла пересекают другую его сторону.

2. Существуют подобные и не равные треугольники.

3. Существуют треугольники сколь угодно большой площади.

4. Существуют треугольники с суммой углов, равной двум прямым.

5. Параллельные прямые — равноотстоящие.

В результате неудачных попыток доказательства пятого постулата у некоторых геометров, начиная с конца XVIII века, возникло сомнение относительно самой возможности доказательства пятого постулата. Полное решение этого вопроса принадлежит великому русскому геометру Николаю Ивановичу Лобачевскому (1793—1854).

Один из эквивалентов пятого постулата состоит в утверждении, что через точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, параллельной данной. Лобачевский заменил пятый постулат следующим:

Через точку вне прямой на плоскости проходят две прямые, не пересекающие данную.

Подобно предшественникам, Лобачевский имел надежду обнаружить противоречие в системе следствий, вытекающих из этого нового постулата. Однако, развив систему следствий до объема «Начал» Евклида, Лобачевский не обнаружил в ней противоречий и на этом основании сделал правильный вывод о существовании геометрии, отличной от геометрии Евклида, в которой пятый постулат Евклида не имеет места. Эта геометрия теперь называется геометрией Лобачевского.

Геометры после Лобачевского строго доказали, что если в геометрии Евклида нет противоречий, то их не может быть и в геометрии Лобачевского. Таким образом, в отношении логической непротиворечивости эти две геометрии находятся в равном положении. Вопрос о том, какая из этих геометрий лучше описывает окружающий нас мир, может быть решен только опытом. В настоящее время установлено, что геометрия окружающего нас мира в больших, космических масштабах имеет более сложное строение, чем геометрия Евклида и Лобачевского. В относительно небольших масштабах эта геометрия близка к евклидовой. Поэтому в повседневной жизни мы пользуемся евклидовой геометрией.

Приведем некоторые теоремы геометрии Лобачевского. Прежде всего, в геометрии Лобачевского верны все теоремы евклидовой геометрии, которые мы доказали до параграфа о параллельных линиях. Таким образом, в геометрии Лобачевского верны теоремы, формулирующие признаки равенства треугольников, теоремы, устанавливающие соотношения между сторонами и углами треугольника, теорема о существовании и единственности перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую, и многие другие теоремы евклидовой геометрии.

Однако теоремы, в доказательстве которых используется аксиома параллельных Лобачевского, звучат совсем по-другому. Например, используя аксиому V, мы доказали, что сумма углов треугольника равна двум прямым. Соответствующая теорема геометрии Лобачевского гласит: сумма углов треугольника меньше двух прямых. Оказывается, она зависит от треугольника. В частности, если один треугольник содержится внутри другого, то объемлющий треугольник имеет сумму углов меньшую.

В геометрии Евклида, как мы знаем, для данного треугольника существует бесконечное множество подобных, не равных ему треугольников. В геометрии Лобачевского, если у двух треугольников соответствующие углы равны, то треугольники равны, т. е. не существует подобных, не равных треугольников.

В геометрии Евклида непересекающиеся прямые являются равноотстоящими. В геометрии Лобачевского, если прямые не пересекаются, то они неограниченно расходятся по крайней мере в одном направлении.

В геометрии Евклида к двум непересекающимся прямым можно провести сколько угодно общих перпендикуляров. В геометрии Лобачевского общий перпендикуляр либо только один, либо вообще не существует общего перпендикуляра.

Все эти теоремы геометрии Лобачевского можно доказать, если принять вместо нашей аксиомы V о параллельных аксиому Лобачевского, сохранив остальные аксиомы. Однако доказательства оказываются довольно сложными. Это объясняет, почему решение вопроса о недоказуемости пятого постулата заняло более двух тысяч лет.

Алексей Васильевич Погорелов

Элементарная геометрия

Планиметрия

М., 1969 г., 128 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректоры *Л. С. Кугушева, И. Я. Кришталь*

Сдано в набор 28/XI 1968 г. Подписано к печати 3/III 1969 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 6,72. Уч.-изд. л. 6,03. Тираж 200 000 экз. Т-02700. Цена книги 17 коп. Заказ № 104.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Главполиграфпром Комитета по печати при Совете Министров СССР. Отпечатано в Ленинградской типографии № 2 им. Евг. Соколовой, Измайловский пр., 29, с матриц Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

Цена 17 коп.